

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES
FINIES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PAR

SIGURD STADLER



LUND 1918
IMPRIMERIE HÅKAN OHLSSON

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LUND ET PUBLIQUEMENT
SOUTENUE LE 11 MAI 1918 À 10 HEURES DU MATIN
DANS LA SALLE N^o VII

PAR

SIGURD STADLER

LICENCIÉ ES SCIENCES. MLM.



LUND 1918
IMPRIMERIE HÅKAN OHLSSON



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553402_0045

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES

THÈSE POUR LE DOCTORAT



PAR

SIGURD STADLER



LUND 1918
IMPRIMERIE HÅKAN OHLSSON

INTRODUCTION.

Dans l'étude des solutions analytiques d'une équation linéaire aux différences finies on a rencontré certaines difficultés dues surtout à ce qu'on ne possédait aucun instrument analytique propre à représenter ces solutions.

M. NÖRLUND, on le sait, a surmonté ces difficultés en des cas importants, et dans ses travaux *, si profonds pour toute la théorie des équations aux différences linéaires, il a développé une théorie toute analogue à la théorie des équations différentielles linéaires. M. NÖRLUND a fait voir que ce sont les séries de facultés, qui jouent le même rôle dans la théorie des équations aux différences qu'ont joué les séries de puissances dans la théorie des équations différentielles.

Dans le second des Mémoires cités, M. NÖRLUND a traité l'équation suivante:

$$(1) \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i (x-1)(x-2) \dots (x-i) p_i(x) \cdot \Delta_{-1}^i u(x) = 0,$$

où $p_n(x) = 1$ et les autres $p_i(x)$ se représentent par des séries de facultés de la forme

$$p_i(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s^{(i)}}{x(x+1) \dots (x+s-1)},$$

convergentes dans un certain demi-plan $\Re(x) > \lambda$, où $\Re(x)$ désigne la partie réelle de x . On a ici posé:

$$\Delta_{\omega}^i u(x) = \frac{u(x+i\omega) - \binom{i}{1} u(x+(i-1)\omega) + \dots + (-1)^i u(x)}{\omega^i}.$$

M. NÖRLUND a démontré l'existence d'un système fondamental de solutions qui se représentent par des développements de la forme

$$(2) \quad u_i(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho} \left(\varphi_0(x) + \varphi_1(x) \cdot \log \left(\frac{1}{x}\right) + \dots + \varphi_m(x) \cdot \log^m \left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

* Voir en particulier:

Sur les équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels. Acta Mathematica t. 40.

Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies par des séries de facultés. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo t. XXXV.

ce qu'on peut aussi représenter par la notion :

$$(A) \quad (x-1) \Delta_{-1} u_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^n a_{\alpha\lambda}(x) u_\lambda(x).$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n.$$

On suppose que les coefficients $a_{\alpha\lambda}(x)$ se représentent par les séries de facultés :

$$a_{\alpha\lambda}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha\lambda}^{(s)}}{x(x+1) \dots (x+s-1)},$$

convergentes dans le demi-plan $\Re(x) > \lambda$. Le produit $x(x+1) \dots (x+s-1)$ doit être remplacé par 1, quand $s=0$.

Si, au lieu de faire les substitutions (3), on avait posé par exemple :

$$\begin{cases} u_1(x) = u(x) \\ u_2(x) = \Delta_{-1} u(x) \\ \dots \dots \dots \\ u_n(x) = \Delta_{-1}^{n-1} u(x) \end{cases}$$

l'équation (1) aurait été ramenée à un système ayant des solutions régulières, mais il n'aurait pas eu la forme canonique.

En traitant le système canonique (A), j'ai constamment fait usage des méthodes, si belles, employées par M. NÖRLUND dans son Mémoire déjà cité.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici mes vifs remerciements à M. N. E. NÖRLUND, qui a bien voulu me proposer cette étude et qui a eu la bienveillance de m'assister de ses précieux conseils.

Dans le chapitre II, où il s'agit de former un système fondamental de solutions dans le cas où l'équation caractéristique admet des racines multiples, ou bien des racines qui sont différentes d'un entier, j'ai emprunté à M. HORN* les méthodes qu'il a employé pour l'étude du système correspondant d'équations différentielles.

Dans le chapitre III j'ai déterminé la forme des systèmes admettant des solutions régulières, en me servant d'un procédé employé par M. SCHLESINGER** aux systèmes correspondants d'équations différentielles.

Pour tout ce qui concerne les séries de facultés, je renvoie aux Mémoires † de M. NÖRLUND; je me contente de rappeler une formule de transformation des séries de facultés, jouant un rôle important dans ce qui suivra :

Soit β un nombre complexe quelconque. La fonction $\Omega(x)$, définie par la série

* J. HORN: Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. I. Mathematische Annalen t. 39 (1891).

** L. SCHLESINGER: Vorlesungen über lineare differentialgleichungen, Leipzig (1908), p. 150.

† Sur les séries de facultés. Acta Mathematica t. 37.

Sur l'intégration etc. Dans le premier chapitre sont énoncés tous les théorèmes dont nous ferons usage.

$$(5) \quad \Omega(x) = a_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s+1} \cdot s!}{x(x+1) \dots (x+s)}$$

ayant l'abscisse de convergence λ , admet une représentation de la forme

$$(6) \quad \Omega(x) = a_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(a_{s+1} + \frac{\beta}{1} a_s + \dots + \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+s-1)}{s!} a_1 \right) s!}{(x+\beta)(x+\beta+1) \dots (x+\beta+s)}.$$

Si $\Re(\beta) \geq 0$, cette série converge, si $\Re(x) > \lambda$, $\Re(x) > 0$; Si $\Re(\beta) < 0$ la série converge, si $\Re(x+\beta) > \lambda$, $\Re(x+\beta) > 0$.

Plusieurs auteurs, M.M. BIRKHOFF*, CARMICHAEL**, HORN***, ont considéré des systèmes d'équations aux différences; mais ces systèmes ne rentrent pas dans la classe, étudiée ici. Ces auteurs ont traité les systèmes d'équations aux différences qui embrassent comme des cas limites les systèmes d'équations différentielles admettant le point à l'infini comme point singulier irrégulier. Les systèmes en question s'écrivent

$$(I) \quad u_{\alpha}(x+1) = x^{\mu} \cdot \sum_{\lambda=1}^n a_{\alpha\lambda}(x) u_{\lambda}(x)$$

les fonctions $a_{\alpha\lambda}(x)$ étant données par les séries

$$a_{\alpha\lambda}(x) = a_{\alpha\lambda}^{(0)} + a_{\alpha\lambda}^{(1)} x^{-1} + a_{\alpha\lambda}^{(2)} x^{-2} + \dots$$

convergentes pourvu que $|x| > R$; μ est un nombre entier positif.

Dans le cas où les racines ρ_{β} de l'équation caractéristique

$$|a_{\alpha\lambda}^{(0)} - \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho| = 0$$

sont distinctes, le système est formellement satisfait par les expressions

$$(s) \quad s_{\alpha\beta}(x) = x^{\mu x} (\rho_{\beta} e^{-\mu})^x x^{\rho_{\beta}} \{ s_{\alpha\beta}^{(0)} + s_{\alpha\beta}^{(1)} x^{-1} + \dots \}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n.$$

M. BIRKHOFF démontre l'existence de deux systèmes fondamentaux de solutions qui sont des fonctions analytiques régulières à l'exception des pôles à distance finie et qui se représentent asymptotiquement par les expressions (s), quand x tend vers

* BIRKHOFF: General theory of linear difference equations. Transactions of the American Mathematical Society. t. 12.

** CARMICHAEL: Linear difference equations and their analytic solutions. ibid.

*** J. HORN: Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Jahresb. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung t. 24. (1915).

l'infini en restant dans un demi-plan limité à gauche resp. à droite par une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses.

Par la transformation

$$u_{\alpha}(x) = \Gamma^{\mu}(x) \cdot v_{\alpha}(x),$$

on peut ramener le système (I) à un système de la même forme mais où le nombre μ est égal à zéro.

M. HORN a considéré ce système et, en se servant de la transformation de Laplace

$$u_{\alpha}(x) = \int e^{-tx} v_{\alpha}(t) dt,$$

il démontre que les solutions indiquées par M.M. BIRKHOFF et CARMICHAEL peuvent se représenter par des séries de facultés convergentes multipliées par certains facteurs.

CHAPITRE I.

1. Nous allons montrer qu'on peut satisfaire au système (A) au moyen de n fonctions qu'on peut mettre sous la forme

$$(7) \quad u_{\alpha}(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}^{(\nu)}}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+\nu-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(x) \cdot g_{\alpha}^{(\nu)}}{\Gamma(x+\rho+\nu)}$$

Représentons par

$$(8) \quad P_{\alpha}(u_1(x), u_2(x) \dots, u_n(x)) = -(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha}(x) + \sum_{\lambda=1}^n a_{\alpha\lambda}(x) u_{\lambda}(x)$$

les expressions qui, égalées à zéro, donnent les équations (A).

En substituant $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)}$ au lieu de $u_{\alpha}(x)$ dans les expressions (8); on trouve:

$$(9) \quad P_{\alpha} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)}, \dots, \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \right) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \sum_{\lambda=1}^n (a_{\alpha\lambda}(x) + \delta_{\alpha\lambda}\rho) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}(x, \rho).$$

Ici, et dans ce qui suivra, on désigne par $\delta_{\alpha\beta}$ le symbole de *Kronecker*:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

De la même manière on obtient

$$(10) \quad P_{\alpha} \left(g_1^{(\nu)} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho+\nu)}, \dots, g_n^{(\nu)} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho+\nu)} \right) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho+\nu)} \sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}(x, \rho+\nu) g_{\lambda}^{(\nu)}$$

Au lieu de $a_{\alpha\lambda}(x)$ substituons les séries (5) dans l'expression (9); on trouve pour les $f_{\alpha\lambda}(x, \rho)$ des développements en série de facultés. Appliquons à ces séries la transformation (6); on trouve les développements

$$(11) \quad f_{\alpha\lambda}(x, \rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_{\alpha\lambda}^{(s)}(\rho)}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+s-1)}.$$

Le dénominateur ne peut s'annuler que si $\rho + \nu$, pour quelque valeur de ν , soit égal à une racine ρ_i de l'équation caractéristique $F(\rho) = 0$.

Soit $\rho = \rho_i$ une racine de cette équation, et supposons qu'elle admette des racines $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{i-1}$ telles que

$$(15) \quad \begin{cases} \rho_{i-1} - \rho_i = d^{(i)} \\ \rho_{i-2} - \rho_{i-1} = d^{(i-1)} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \rho_0 - \rho_1 = d^{(1)} \end{cases}$$

$d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(i)}$ étant des nombres entiers positifs.

Alors les expressions

$$\begin{aligned} & F(\rho + d^{(i)}) \\ & F(\rho + d^{(i)} + d^{(i-1)}) \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & F(\rho + d^{(i)} + d^{(i-1)} + \dots + d^{(1)}) \end{aligned}$$

s'annulent toutes pour $\rho = \rho_i$; mais nous prendrons les valeurs indéterminées $g_\alpha^{(0)}$, dont les valeurs proportionnelles interviennent seules dans le calcul, comme des fonctions de ρ , contenant comme facteur une puissance convenable de $\rho - \rho_i$, de sorte que toutes les expressions de $g_\alpha^{(\nu)}$ restent finies et ne s'annulent pas toutes pour $\rho = \rho_i$.

Il est donc toujours possible de trouver des séries de la forme (7) qui satisfont formellement au système d'équations non-homogènes

$$(16) \quad P_\alpha(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \sum_{\lambda=1}^n (a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho) \cdot g_\lambda^{(0)}(\rho).$$

2. Avant de démontrer la convergence des séries (7), nous allons préparer le système (A) par quelques transformations.

Posons

$$u_\alpha(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} v_\alpha(x);$$

le système (A) se transforme en le suivant:

$$(x + \rho - 1) \Delta_{-1} v_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^n (a_{\alpha\lambda}(x) + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho) v_\lambda(x)$$

et le système non-homogène (16) se transforme en:

$$(17) \quad (x + \rho - 1) \Delta_{-1} v_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^n c_{\alpha\lambda}(x) \cdot v_\lambda(x) + \sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho) \cdot g_\lambda^{(0)}(\rho),$$

où l'on a posé $c_{\alpha\lambda}(x) = a_{\alpha\lambda}(x) + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho$.

Ce système est donc satisfait formellement par les développements :

$$(18) \quad v_{\alpha}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}^{(\nu)}}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+\nu-1)}.$$

Au lieu de déterminer directement le domaine de convergence de ces séries, nous allons étudier des séries qu'on déduit de celles-ci à l'aide de la formule de transformation (9), de sorte que nous pourrions étudier non seulement le domaine de convergence mais aussi les domaines de sommabilités des séries (18).

Nous supposons que les séries pour les $a_{\alpha\lambda}(x)$ sont sommables par des moyennes arithmétiques d'ordre r pour $\Re(x) > \lambda_r$ et que l'une au moins de ces séries admet λ_r pour abscisse de sommabilité d'ordre r .

Alors les séries $c_{\alpha\lambda}(x)$ admettent les développements

$$c_{\alpha\lambda}(x) = a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_{\alpha\lambda}^{(s)}}{(x+r)(x+r+1)\dots(x+r+s-1)},$$

convergeants, pourvu que $\Re(x) > \lambda_r$, $\Re(x) > 0$.

Multiplions le système (18) par $q(x) = \frac{x+r}{x+\rho-1}$, on trouve

$$(19) \quad \begin{aligned} (x+r)\Delta_{-1}v_{\alpha}(x) &= \sum_{\lambda=1}^n \frac{x+r}{x+\rho-1} \cdot c_{\alpha\lambda}(x) \cdot v_{\lambda}(x) + q(x) \cdot \sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho) g_{\lambda}^{(0)}(\rho) = \\ &= \sum_{\lambda=1}^n p_{\alpha\lambda}(x) \cdot v_{\lambda}(x) + q(x) \cdot \sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho) \cdot g_{\lambda}^{(0)}(\rho). \end{aligned}$$

Les fonctions $p_{\alpha\lambda}(x)$ et $q(x)$ se représentent par des séries de la forme

$$(20) \quad p_{\alpha\lambda}(x) = a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d_{\alpha\lambda}^{(s)}}{(x+r)(x+r+1)\dots(x+r+s-1)},$$

$$(21) \quad q(x) = 1 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{s+1} \cdot s!}{(x+r)(x+r+1)\dots(x+r+s)},$$

convergentes pourvu que $\Re(x) > \mu$, μ désignant le plus grand des nombres λ_r , 0 et $\Re(1-\rho)$.

En posant

$$A_{\alpha}(v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)) = -(x+r) \Delta_{-1}v_{\alpha}(x) + \sum_{\lambda=1}^n (a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho) \cdot v_{\lambda}(x)$$

$$B_{\alpha}(v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)) = \sum_{\lambda=1}^n (-p_{\alpha\lambda}(x) + a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho) \cdot v_{\lambda}(x),$$

le système (19) peut s'écrire

$$(22) \quad A_{\alpha}(v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)) = B_{\alpha}(v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)) + q(x) \cdot \sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho) \cdot g_{\lambda}^{(0)}(\rho)$$

La fonction $a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho - p_{\alpha\lambda}(x)$ admet un développement de la forme

$$(23) \quad a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho - p_{\alpha\lambda}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e_{\alpha\lambda}^{(s+1)} \cdot s!}{(x+r)(x+r+1) \dots (x+r+s)}.$$

Le système (22) est formellement satisfait par des développements de la forme

$$(24) \quad v_{\alpha}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{G_{\alpha}^{(\nu)}}{(x+r+1)(x+r+2) \dots (x+r+\nu)}.$$

En substituant ces séries dans l'équation (22), on trouve

$$A_{\alpha}(v_1(x), \dots, v_n(x)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(x+r+1)}{\Gamma(x+r+\nu+1)} \sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho+\nu) \cdot G_{\lambda}^{(\nu)},$$

ou encore

$$(25) \quad A_{\alpha}(v_1(x), \dots, v_n(x)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho+\nu) \cdot G_{\lambda}^{(\nu)}}{(x+r+1)(x+r+2) \dots (x+r+\nu)}.$$

En se servant de la formule de transformation (6), on trouve pour les fonctions $a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho - p_{\alpha\lambda}(x)$ des développements de la forme

$$(26) \quad a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho - p_{\alpha\lambda}(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{F_{\alpha\lambda}^{(s)}(\nu)}{(x+r+\nu+1)(x+r+\nu+2) \dots (x+r+\nu+s)}$$

$\nu = 0, 1, 2, \dots$

convergeants pourvu que $\Re(x) > \mu$.

En tenant compte de (26), on trouve

$$(27) \quad B_{\alpha}(v_1(x), \dots, v_n(x)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sum_{\lambda=1}^n F_{\alpha\lambda}^{(\nu)}(0) \cdot G_{\lambda}^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^n F_{\alpha\lambda}^{(\nu-1)}(1) \cdot G_{\lambda}^{(1)} + \dots + \sum_{\lambda=1}^n F_{\alpha\lambda}^{(1)}(\nu-1) \cdot G_{\lambda}^{(\nu-1)}}{(x+r+1)(x+r+2) \dots (x+r+\nu)}$$

L'expression (21) de $q(x)$ peut se transformer en la forme suivante

$$(28) \quad q(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C^{(\nu)}}{(x+r+1)(x+r+2) \dots (x+r+\nu)}.$$

En introduisant ces développements dans le système (19), et en égalant les coefficients des termes correspondants, on voit que le système est identiquement satisfait si l'on a

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_{\alpha}^{(0)} = g_{\alpha}^{(0)} \\ \sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho + \nu) \cdot G_{\lambda}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^n F_{\alpha\lambda}^{(\nu)}(0) \cdot G_{\lambda}^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^n F_{\alpha\lambda}^{(\nu-1)}(1) \cdot G_{\lambda}^{(1)} + \dots + \\ \quad + \sum_{\lambda=1}^n F_{\alpha\lambda}^{(1)}(\nu-1) \cdot G_{\lambda}^{(\nu-1)} + C^{(\nu)} \cdot \sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho) \cdot g_{\lambda}^{(0)}(\rho). \end{array} \right.$$

$$\nu = 1, 2, 3, \dots$$

Les $F_{\alpha\lambda}^{(\nu)}(\nu)$, $f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho)$ et $C^{(\nu)}$ étant des fonctions rationnelles de ρ , on trouve pour les $G_{\alpha}^{(\nu)}$ des expressions de la forme

$$G_{\alpha}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^n R_{\alpha\lambda}^{(\nu)}(\rho) \cdot g_{\lambda}^{(0)}(\rho)$$

où les $R_{\alpha\lambda}^{(\nu)}(\rho)$ sont des fonctions rationnelles de ρ . En choisissant les $g_{\alpha}^{(0)}(\rho)$ comme nous l'avons fait dans ce qui précède, on trouve toujours des valeurs finies de $G_{\alpha}^{(\nu)}$.

3. Maintenant nous allons aborder la détermination des domaines de convergences (resp. sommabilités) des expressions pour nos solutions.

Par la définition même des quantités

$$F_{\alpha\lambda}^{(s)}(\nu) \quad s, \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

on voit qu'elles sont des fonctions linéaires à coefficients positifs des quantités $S_{\alpha\lambda}^{(1)}$, $S_{\alpha\lambda}^{(2)}$, ... où

$$S_{\alpha\lambda}^{(m)} = \sum_{s=1}^m e_{\alpha\lambda}^{(s)} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

les $e_{\alpha\lambda}^{(s)}$ étant les coefficients qui entrent dans les séries (23).

Cela posé, nous allons former des séries majorantes, d'après les définitions de M. NÖRLUND, pour les séries (23). Ces séries étant convergentes pourvu que $\Re(x) > \mu$, on peut prendre comme des séries majorantes les suivantes

$$\frac{M_{\alpha\lambda}}{x - \mu - \varepsilon} = \sum_{s=0}^{\infty} M_{\alpha\lambda} \cdot \frac{(\mu + r + \varepsilon)(\mu + r + \varepsilon + 1) \dots (\mu + r + \varepsilon + s - 1)}{(x + r)(x + r + 1) \dots (x + r + s)},$$

les $M_{\alpha\lambda}$ étant des nombres positifs, indépendants de ρ , tels que les sommes des m premiers coefficients de ces séries soient plus grandes que les valeurs absolues des sommes des m premiers coefficients des séries (23), et cela quel que soit m .

De même nous avons $C^{(m)} = S^{(m)}$ multiplié par un coefficient positif, où nous avons posé

$$S^{(m)} = \sum_{s=1}^m e^{(s)}.$$

Pour la fonction $q(x)$ nous prenons comme série majorante la suivante

$$1 + \frac{K}{x - \mu - \varepsilon} = 1 + K \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mu + r + \varepsilon)(\mu + r + \varepsilon + 1) \dots (\mu + r + \varepsilon + s - 1)}{(x + r)(x + r + 1) \dots (x + r + s)},$$

où K est un nombre positif tel que la somme des m premiers coefficients soit plus grande que la valeur absolue de la somme des m premiers coefficients de la série (21), et cela quel que soit m .

Nous allons maintenant considérer le système d'équations aux différences finies :

$$(30) \quad \mu_{\alpha} \cdot \left\{ -(x + r) \Delta_{-1} \bar{v}_{\alpha}(x) + \sum_{\lambda=1}^n \alpha_{\alpha\lambda} \cdot \bar{v}_{\lambda}(x) \right\} = \sum_{\lambda=1}^n M_{\alpha\lambda} \cdot \frac{\bar{v}_{\lambda}(x)}{x - \mu - \varepsilon} + \\ + \mu_{\alpha} \cdot \left[1 + \frac{K}{x - \mu - \varepsilon} \right] \cdot \sum_{\lambda=1}^n \delta_{\alpha\lambda} \cdot \gamma_{\lambda}^{(0)};$$

les μ_{α} , $\alpha_{\alpha\lambda}$ et $\gamma_{\alpha}^{(0)}$ étant des constantes positives, dont nous aurons à disposer ultérieurement.

Ce système est de la même forme que le système (19), et il est donc formellement satisfait par des séries de la forme

$$(31) \quad \bar{v}_{\alpha}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_{\alpha}^{(\nu)}}{(x + r + 1)(x + r + 2) \dots (x + r + \nu)}.$$

Pour les coefficients $\gamma_{\alpha}^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) nous aurons des formules de récurrence de la même forme que (29):

$$(32) \quad \sum_{\lambda=1}^n \mu_{\alpha} \cdot (\alpha_{\alpha\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \nu) \cdot \gamma_{\lambda}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^n \bar{F}_{\alpha\lambda}^{(\nu)}(0) \cdot \gamma_{\lambda}^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^n \bar{F}_{\alpha\lambda}^{(\nu-1)}(1) \cdot \gamma_{\lambda}^{(1)} + \dots + \\ + \sum_{\lambda=1}^n \bar{F}_{\alpha\lambda}^{(1)}(\nu - 1) \cdot \gamma_{\lambda}^{(\nu-1)} + \mu_{\alpha} \cdot \bar{C}^{(\nu)} \cdot \gamma_{\alpha}^{(0)}; \\ \alpha = 1, 2, \dots, n; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

D'après ce qui précède, nous concluons que les quantités $\bar{F}_{\alpha\lambda}^{(s)}(\nu)$ sont positives et plus grandes que les modules des expressions $F_{\alpha\lambda}^{(s)}(\nu)$, et que les $\bar{C}^{(\nu)}$ sont positives et plus grandes que $\text{mod } C^{(\nu)}$.

Nous allons démontrer que, par un choix convenable des nombres $\gamma_{\alpha}^{(0)}$ et μ_{α} , on peut arranger de manière que les nombres $\gamma_{\alpha}^{(\nu)}$, définis par les formules (32) soient plus grandes que $\text{mod } g_{\alpha}^{(\nu)}$, et cela quel que soit ν .

Nous posons

$$\alpha_{\alpha\lambda} = \delta_{\alpha\lambda}.$$

Supposons que les inégalités

$$\mu_{\alpha} \cdot \gamma_{\alpha}^{(0)} > \text{mod} \left(\sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho) \cdot g_{\lambda}^{(0)} \right)$$

et

$$\gamma_{\alpha}^{(\nu)} > \text{mod } g_{\alpha}^{(\nu)}$$

soient satisfaites pour $\nu = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1$.

Il résulte de (29) et (32) que

$$(33) \quad \sum_{\lambda=1}^n \mu_{\alpha} \cdot \delta_{\alpha\lambda} \cdot (\nu + 1) \cdot \gamma_{\lambda}^{(\nu)} > \text{mod} \left(\sum_{\lambda=1}^n f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho + \nu) \cdot G_{\lambda}^{(\nu)} \right) = \\ = \theta_{\alpha} \cdot \sum_{\lambda=1}^n \text{mod } f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho + \nu) \cdot \text{mod } G_{\lambda}^{(\nu)},$$

où θ_{α} sont des nombres positifs compris entre zéro et un.

Mais nous avons

$$f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho + \nu) = a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot (\rho + \nu).$$

L'inégalité (33) nous donne aussi

$$\mu_{\alpha} \cdot (\nu + 1) \cdot \gamma_{\alpha}^{(\nu)} > \theta_{\alpha} \cdot \text{mod} (a_{\alpha\alpha}^{(0)} + \rho + \nu) \cdot \text{mod } G_{\alpha}^{(\nu)},$$

et si nous posons

$$\mu_{\alpha} = \theta_{\alpha} \cdot \mu'_{\alpha}$$

nous aurons

$$\mu'_{\alpha} \cdot (\nu + 1) \cdot \gamma_{\alpha}^{(\nu)} > \text{mod} (a_{\alpha\alpha}^{(0)} + \rho + \nu) \cdot \text{mod } G_{\alpha}^{(\nu)}.$$

Maintenant nous voulons disposer des nombres μ'_{α} de manière que les inégalités

$$\mu'_{\alpha} \cdot (\nu + 1) < \text{mod} (a_{\alpha\alpha}^{(0)} + \rho + \nu)$$

soient vraies quel que soit l'entier positif ν , et quel que soit ρ dans son domaine de variabilité que nous voulons désigner par la lettre Γ .

Il en résulte que les inégalités

$$\gamma_{\alpha}^{(\nu)} > \text{mod } G_{\alpha}^{(\nu)}$$

sont satisfaites quel que soit ν , si elles sont satisfaites pour $\nu = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1$.

C'est ce que nous pouvons toujours obtenir, en déterminant les $\gamma_{\alpha}^{(0)}$ de manière à avoir

$$\mu_{\alpha} \cdot \gamma_{\alpha}^{(0)} > \sum_{\lambda=1}^n H_{\alpha\lambda} \cdot \text{mod } g_{\lambda}^{(0)}$$

et

$$\gamma_{\alpha}^{(0)} > \text{mod } g_{\alpha}^{(0)}$$

quel que soit ρ dans le domaine Γ , $H_{\alpha\lambda}$ étant des nombres positifs, indépendants de ρ , et plus grands que le plus grand des nombres un et $\text{mod } f_{\alpha\lambda}^{(0)}(\rho)$, et cela pour toutes les valeurs de ρ en question.

Maintenant nous allons former des formules de récurrence pour les $\gamma_{\alpha}^{(\nu)}$, qui sont plus simples que les formules (32).

Substituons les séries (31) dans le système (30); nous aurons:

$$(34) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu_{\alpha} \cdot (\nu+1) \cdot \gamma_{\alpha}^{(\nu)}}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+\nu)} = \frac{1}{x-\mu-\varepsilon} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^n \frac{M_{\alpha\lambda} \cdot \gamma_{\lambda}^{(\nu)}}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+\nu)} +$$

$$+ \frac{\mu_{\alpha} \cdot K}{x-\mu-\varepsilon} \cdot \sum_{\lambda=1}^n \delta_{\alpha\lambda} \cdot \gamma_{\lambda}^{(0)}.$$

En multipliant par $x-\mu-\varepsilon = (x+r+1) - (\mu+\varepsilon+r+1)$, on trouve

$$(35) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu_{\alpha} \cdot (\nu+1) \cdot \gamma_{\alpha}^{(\nu)}}{(x+r+2)(x+r+3)\dots(x+r+\nu)} = \sum_{\lambda=1}^n M_{\alpha\lambda} \cdot \gamma_{\lambda}^{(0)} + K \cdot \mu_{\alpha} \cdot \gamma_{\alpha}^{(0)} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sum_{\lambda=1}^n M_{\alpha\lambda} \cdot \gamma_{\lambda}^{(0)} + \mu_{\alpha} \cdot (\nu+1) \cdot (\mu+\varepsilon+r+1) \cdot \gamma_{\alpha}^{(\nu)}}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+\nu)}.$$

En se servant de la transformation indiquée par la formule (6), on voit que le premier membre peut s'écrire

$$2 \cdot \gamma_{\alpha}^{(1)} \cdot \mu_{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{\alpha}^{(\nu+1)} \cdot (\nu+2) \cdot \mu_{\alpha} - (\nu-1)(\nu+2) \cdot \mu_{\alpha} \cdot \gamma_{\alpha}^{(\nu)}}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+\nu)}.$$

En égalant les coefficients des termes correspondants, on trouve

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \mu_{\alpha} \cdot \gamma_{\alpha}^{(1)} = \sum_{\lambda=1}^n (M_{\alpha\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \mu_{\alpha} \cdot K) \gamma_{\lambda}^{(0)} \\ \mu_{\alpha} \cdot (\nu+2) \cdot \gamma_{\alpha}^{(\nu+1)} = \mu_{\alpha} \cdot \gamma_{\alpha}^{(\nu)} \cdot (\nu+1)(\mu+r+\varepsilon+\nu) + \sum_{\lambda=1}^n M_{\alpha\lambda} \cdot \gamma_{\lambda}^{(\nu)}. \end{array} \right.$$

$$\nu = 1, 2, 3, \dots$$

Soit $\gamma^{(\nu)}$ le plus grand des nombres $\gamma_{\alpha}^{(\nu)}$ et soit M le plus grand des nombres

$$\frac{M_{\alpha\lambda}}{\mu_{\alpha}}.$$

Des équations (36) on conclut

$$\gamma_{\alpha}^{(\nu+1)} < \gamma_{\alpha}^{(\nu)} \cdot \frac{\nu+1}{\nu+2} \cdot (\mu+r+\varepsilon+\nu) + \frac{n}{\nu+2} \cdot M \cdot \gamma^{(\nu)}.$$

Définissons des nombres positifs $\bar{\gamma}^{(\nu)}$ par les équations

$$\bar{\gamma}^{(\nu+1)} = \bar{\gamma}^{(\nu)} \cdot \frac{\nu+1}{\nu+2} \cdot (\mu+r+\varepsilon+\nu) + \frac{n}{\nu+2} \cdot M \cdot \bar{\gamma}^{(\nu)}$$

$$\nu = 1, 2, 3, \dots$$

$$\bar{\gamma}^{(0)} = \gamma^{(0)}; \quad \bar{\gamma}^{(1)} = \gamma^{(1)}$$

Les nombres $\bar{\gamma}^{(\nu)}$ sont donc plus grands que les $\gamma^{(\nu)}$ et par suite plus grands que les $\gamma_\alpha^{(\nu)}$.

Par suite, si la série de facultés

$$(37) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{\gamma}^{(\nu)}}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+\nu)}$$

est convergente, les séries (31) et (24) convergent aussi. En posant

$$u_\nu = \frac{\bar{\gamma}^{(\nu)}}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+\nu)},$$

on trouve pour des valeurs de ν dépassant une certaine limite

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = 1 + \frac{\mu + \varepsilon - x}{\nu} + \dots$$

La série (37) et par conséquent les séries (31) et (24) sont donc absolument convergentes pourvu que $\Re(x) > \mu - 1$.

Les séries (24) qui représentent les solutions $v_\alpha(x)$ peuvent aussi se mettre sous la forme

$$(38) \quad v_\alpha(x) = G_\alpha^{(0)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(G_\alpha^{(\nu+1)} - \nu G_\alpha^{(\nu)})}{(x+r)(x+r+1)\dots(x+r+\nu)},$$

et ces séries convergent pourvu que $\Re(x) > \mu - 1$, mais elles ne sont pas nécessairement absolument convergentes dans ce domaine.

Les coefficients $G_\alpha^{(\nu)}$ sont des fonctions de ρ , mais les séries (38) convergent uniformément par rapport à ρ , quand ρ se trouve dans le domaine de variabilité Γ . Considérons le terme reste

$$R_\alpha^{(n)} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(G_\alpha^{(\nu+1)} - \nu G_\alpha^{(\nu)})}{(x+r)(x+r+1)\dots(x+r+\nu)}$$

qui peut aussi s'écrire

$$(39) \quad R_\alpha^{(n)} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{G_\alpha^{(\nu)}}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+\nu)} - \frac{n G_\alpha^{(n)}}{(x+r)(x+r+1)\dots(x+r+n)}.$$

Nous supposons que le domaine de variabilité d'une certaine des racines ρ_α soit un petit cercle autour de ρ_α comme centre et avec le rayon $\frac{\varepsilon'}{2}$.

Soit μ' le plus grand des nombres μ et $\Re(1 - \rho_\alpha + \varepsilon)$, et remplaçons dans les calculs précédents partout μ par μ' ; on voit que les nombres $\gamma_\alpha^{(\nu)}$ sont positifs et indépendants de ρ . Les termes $R_\alpha^{(n)}$ se composent de deux termes, dont l'un est en valeur absolue plus petit que le terme reste dans une série convergente dont les termes sont indépendants de ρ et dont l'autre tend uniformément vers zéro quand n tend vers l'infini. Les séries (38) sont donc uniformément convergentes par

rapport à ρ sous les conditions indiquées. En dérivant les séries terme par terme un nombre quelconque de fois, on trouve des séries qui convergent sous les mêmes conditions.

4. Posons

$$v_\alpha(x, \rho) = v_\alpha(x), \quad \frac{\partial^s v_\alpha(x, \rho)}{\partial \rho^s} = v_\alpha^{(s)}(x, \rho)$$

et

$$\left[\frac{\partial^s v_\alpha(x, \rho)}{\partial \rho^s} \right]_{\rho=\rho_i} = v_\alpha^{(s)}(x, \rho_i).$$

Les séries qui représentent $v_\alpha(x, \rho)$ peuvent aussi se mettre sous la forme

$$(40) \quad v_\alpha(x, \rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\alpha^{(\nu)}(\rho)}{x(x+1) \dots (x+\nu-1)},$$

où les séries de facultés sont sommables par des moyennes arithmétiques d'ordre r pourvu que $\Re(x) > \mu - 1$. Ces séries de facultés sont de la même forme que les séries qui représentent les coefficients $a_{\alpha\lambda}(x)$ de notre système (A).

Nous avons donc démontré que le système

$$(16) \quad P_\alpha(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \sum_{\lambda=1}^n (a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho) \cdot g_\lambda^{(0)}(\rho)$$

est satisfait par les séries

$$(41) \quad u_\alpha(x, \rho) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} v_\alpha(x, \rho).$$

En faisant tendre ρ vers une des racines ρ_n de l'équation caractéristique, on voit que le système d'équations homogènes (A) est satisfait par les fonctions

$$u_\alpha(x, \rho_n) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho_n)} v_\alpha(x, \rho_n),$$

pourvu que les quantités $g_\alpha^{(0)}$ soient choisies de manière à satisfaire aux équations 12 a. Nous supposons que les n racines soient distinctes et que les racines ne soient pas différentes entre elles d'un nombre entier. Soit ρ_β une des racines et considérons le système

$$(12 \text{ a}) \quad \sum_{\lambda=1}^n (a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho_\beta) \cdot g_\lambda^{(0)} = 0.$$

D'après la théorie des équations linéaires, nous savons que ce système admet un système de solutions que nous voulons représenter par la notion

$$g_{1\beta}^{(0)}, g_{2\beta}^{(0)}, \dots, g_{n\beta}^{(0)}.$$

et ce système sera complètement déterminé, si l'on a pris arbitrairement l'une des quantités $g_{\alpha\beta}^{(0)}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$).

On obtient n systèmes de solutions correspondant aux n racines ρ_β , et nous savons que le déterminant

$$|g_{\alpha\beta}^{(0)}| \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

est différent de nul.

De ce fait on peut se servir pour démontrer que les n systèmes de solutions, que nous voulons désigner par

$$u_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n),$$

forment un système fondamental de solutions de (A).

Considérons en effet le déterminant des solutions

$$D = |u_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)| \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n).$$

Quand x tend vers l'infini en restant dans le domaine de convergence des séries de facultés, on trouve

$$\lim x^{\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n} D = |g_{\alpha\beta}^{(0)}|.$$

Le déterminant D n'étant pas identiquement nul, les solutions forment un système fondamental.

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Soit un système d'équations aux différences finies de la forme canonique

$$(x-1) \Delta_{-1} u_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^n a_{\alpha\lambda}(x) u_\lambda(x) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n),$$

où les coefficients $a_{\alpha\lambda}(x)$ se représentent par des séries de facultés de la forme

$$a_{\alpha\lambda}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha\lambda}^{(s)}}{x(x+1) \dots (x+s-1)},$$

convergentes pourvu que $\Re(x) > \lambda$ et sommables par des moyennes arithmétiques pour $\Re(x) > \lambda_r$. Supposons que les racines ρ_β ($\beta = 1, 2, \dots, n$) de l'équation caractéristique

$$|a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho| = 0$$

soient distinctes et que les nombres ρ_β n'aient entre eux aucune différence entière. Ce système admet n systèmes de solutions, linéairement indépendants

$$u_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_\beta)} v_\alpha(x, \rho_\beta) \\ \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

où les fonctions $v_\alpha(x, \rho_\beta)$ se représentent par des séries de facultés de la même forme que les coefficients $a_{\alpha\lambda}(x)$, convergentes pourvu que $\Re(x+1) > \lambda'$, $\Re(x+\rho_\beta) > 0$ et sommables d'ordre r pourvu que $\Re(x+1) > \lambda'_r$, $\Re(x+\rho_\beta) > 0$; λ' et λ'_r désignant le plus grand des nombres λ resp. λ_r et zéro.

5. Dans le cas où il y a entre les racines de l'équation caractéristique des racines multiples et des racines, différentes entre elles d'un nombre entier, nous savons par le précédent qu'on peut toujours choisir les quantités $g_\alpha^{(0)}(\rho)$ de manière à avoir les solutions

$$(41) \quad u_\alpha(x, \rho) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} v_\alpha(x, \rho),$$

satisfaisant au système d'équations inhomogènes

$$(16) \quad P_\alpha(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \sum_{k=1}^n (u_{\alpha k}^{(0)} + \delta_{\alpha k} \cdot \rho) \cdot g_k^{(0)}(\rho).$$

Choisissons donc les $g_\alpha^{(0)}(\rho)$ de manière qu'aucune des quantités $g_\alpha^{(\nu)}(\rho)$ ne devienne infini pour $\rho = \rho_\beta$, et en outre que

$$P_\alpha(u_1(x, \rho), u_2(x, \rho), \dots, u_n(x, \rho))$$

s'annule h fois pour $\rho = \rho_\beta$, h étant un nombre entier. Remarquons que les fonctions

$$u_\alpha^{(s)}(x, \rho)$$

satisfont au système

$$P_\alpha(u_1^{(s)}(x), u_2^{(s)}(x), \dots, u_n^{(s)}(x)) = \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} \left[\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \sum_{k=1}^n (u_{\alpha k}^{(0)} + \delta_{\alpha k} \cdot \rho) \cdot g_k^{(0)}(\rho) \right]$$

Sous les conditions indiquées les expressions

$$u_\alpha^{(s)}(x, \rho_\beta) = \left[\frac{\partial^s}{\partial \rho^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \cdot v_\alpha(x, \rho) \right) \right]_{\rho=\rho_\beta}$$

ou encore

$$u_\alpha^{(s)}(x, \rho_\beta) = \sum_{\lambda=0}^s \binom{s}{\lambda} v_\alpha^{(\lambda)}(x, \rho_\beta) \cdot \frac{\partial^{s-\lambda}}{\partial \rho_\beta^{s-\lambda}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho_\beta)} \right)$$

sont donc des solutions du système

$$P_\alpha(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) = 0.$$

Les fonctions $v_\alpha^{(s)}(x, \rho)$, étant des dérivées de séries uniformément convergentes se représentent donc par des séries de facultés de la forme

$$v_\alpha^{(s)}(x, \rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\alpha^{(\nu, s)}(\rho)}{x(x+1) \dots (x+\nu-1)},$$

où l'on a posé

$$h_{\alpha}^{(\nu, s)}(\rho) = \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} h_{\alpha}^{(\nu)}(\rho),$$

sommables par des moyennes arithmétiques d'ordre r , si $\Re(x) > p - 1$.

Dans le chapitre suivant nous allons montrer en détail, comment on peut toujours construire un système fondamental de solutions du système (A).

CHAPITRE II.

6. Nous voulons d'abord transformer le système canonique

$$(A) \quad (x-1) \Delta_{-1} u_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^n a_{\alpha\lambda}(x) \cdot u_\lambda(x), \quad a_{\alpha\lambda}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha\lambda}^{(s)}}{x(x+1) \dots (x+s-1)},$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n,$$

en une forme normale, en employant le même procédé, dont M. HORN* s'est servi pour intégrer le système correspondant d'équations différentielles.

A l'aide des constantes encore indéterminées $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ nous pouvons ramener le système (A) à une seule équation

$$(x-1) \Delta_{-1} \left[\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \cdot u_{\alpha}(x) \right] = \sum_{\alpha, \lambda} a_{\alpha\lambda}(x) \cdot \mu_{\alpha} \cdot u_{\lambda}(x).$$

En employant les substitutions linéaires

$$(42) \quad \mu_{\alpha} = \sum_{\lambda} g_{\alpha\lambda} v_{\lambda} \quad \text{et} \quad u_{\alpha} = \sum_{\lambda} h_{\alpha\lambda} z_{\lambda},$$

on peut ramener les deux formes bilinéaires

$$\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} u_{\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha, \lambda} a_{\alpha\lambda}^{(0)} \mu_{\alpha} u_{\lambda}$$

aux deux formes

$$\sum_{\alpha} v_{\alpha} z_{\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha, \lambda} b_{\alpha\lambda}^{(0)} v_{\alpha} z_{\lambda},$$

ayant la forme normale de WEIERSTRASS.

Les substitutions (42) sont telles que l'on aura aussi

$$v_{\lambda} = \sum_{\alpha} h_{\alpha\lambda} \mu_{\alpha} \quad \text{et} \quad z_{\lambda} = \sum_{\alpha} g_{\alpha\lambda} u_{\alpha}$$

à cause de la forme de l'expression

$$\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} u_{\alpha}.$$

Soit

$$\sum_{\alpha, \lambda} a_{\alpha\lambda} \mu_{\alpha} u_{\lambda} = \sum_{\alpha, \lambda} b_{\alpha\lambda} v_{\alpha} z_{\lambda},$$

* loc. cit.

nous obtenons l'équation

$$(x-1) \Delta \left[\sum_{\alpha} v_{\alpha} z_{\alpha} \right] = \sum_{\alpha, \lambda} b_{\alpha\lambda} v_{\alpha} z_{\lambda}.$$

Or, les v_{α} étant indéterminés, ainsi que les μ_{α} , nous en obtenons le système

$$(B) \quad \begin{aligned} (x-1) \Delta z_{\alpha}(x) &= \sum_{\lambda=1}^n b_{\alpha\lambda}(x) z_{\lambda}(x) \\ \alpha &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

C'est la forme normale du système canonique, dont nous allons nous servir dans ce qui suit.

Nous avons pour les coefficients:

$$(43) \quad b_{\alpha\lambda}(x) = \sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu} \cdot g_{\nu\alpha} \cdot h_{\mu\lambda} = b_{\alpha\lambda}^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\alpha\lambda}^{(\nu)}}{x(x+1) \dots (x+\nu-1)},$$

les séries du second membre de (43) ayant le même domaine de convergence que les $a_{\alpha\lambda}(x) : \Re(x) > \lambda$.

Les solutions $u_{\alpha}(x)$ du système (A) sont liées aux solutions $z_{\alpha}(x)$ du système (B) par les relations

$$(43^*) \quad u_{\alpha} = \sum_{\lambda} h_{\alpha\lambda} z_{\lambda}.$$

Les solutions $u_{\alpha}(x)$ et $z_{\alpha}(x)$ ont donc la même forme.

7. Soit $\rho = \rho_{\alpha}$ un diviseur élémentaire simple du déterminant caractéristique

$$F(\rho) = \left| a_{\alpha\lambda}^{(0)} + \delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho \right|,$$

on aura

$$b_{\alpha\lambda}^{(0)} = -\delta_{\alpha\lambda} \cdot \rho_{\alpha},$$

et à ce diviseur correspondra l'équation aux différences

$$(44) \quad (x-1) \Delta z_{\alpha}(x) = -\rho_{\alpha} z_{\alpha}(x) + \frac{1}{x} \sum_{\lambda} b_{\alpha\lambda}^{(1)} z_{\lambda}(x) + \dots$$

Supposons que l'on ait

$$\rho_i = \rho_0 \quad \text{pour} \quad i = \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^e.$$

et que $(\rho - \rho_0)^e$ soit un diviseur multiple d'ordre e de $F(\rho)$, nous aurons

$$(45) \quad \begin{cases} b_{\alpha'\alpha'}^{(0)} = -\rho_0, & b_{\alpha''\alpha''}^{(0)} = -\rho_0, \quad \dots, \quad b_{\alpha^e\alpha^e}^{(0)} = -\rho_0 \\ b_{\alpha'\alpha'}^{(1)} = 1, & b_{\alpha''\alpha''}^{(1)} = 1, \quad \dots, \quad b_{\alpha^e\alpha^e}^{(1)} = 1, \end{cases}$$

et tous les autres $b_{\alpha\lambda}^{(0)}$ seront nuls, α ayant une des valeurs $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^e$. A ce diviseur multiple correspondront les équations aux différences

Par suite, les éléments

$$(47) \quad z_{\alpha}^{(\lambda)} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda}$$

constituent une solution du système (B). L'expression (47) nous fournit r solutions, lorsqu'on remplace λ par les indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

En procédant de la même manière avec les autres groupes de racines de l'équation caractéristique, on arrive à un système fondamental de solutions. En effet, en considérant le déterminant des solutions, et en remarquant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} g_{\alpha\beta}^{(0)} \end{vmatrix} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

ne s'annule pas, on voit que les solutions sont linéairement indépendantes.

9. Supposons que l'équation caractéristique admette les racines

$$\rho_{\lambda^{(0)}} = \rho_0 \text{ pour } \lambda^{(0)} = \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{r^{(0)}}^{(0)},$$

$$\rho_{\lambda^{(1)}} = \rho_1 \quad \gg \quad \lambda^{(1)} = \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{r^{(1)}}^{(1)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\rho_{\lambda^{(m)}} = \rho_m \quad \gg \quad \lambda^{(m)} = \lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \dots, \lambda_{r^{(m)}}^{(m)}.$$

Les différences

$$\rho_0 - \rho_1 = d^{(1)}, \rho_1 - \rho_2 = d^{(2)}, \dots, \rho_{m-1} - \rho_m = d^{(m)}$$

seront des nombres entiers positifs. D'ailleurs, entre $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m$ et toute autre racine il n'existe pas de différence entière. Supposons ensuite que $\rho - \rho_0$ soit $r^{(0)}$, $\rho - \rho_1$ soit $r^{(1)}$... et $\rho - \rho_m$ soit $r^{(m)}$ fois diviseur élémentaire du déterminant caractéristique $F(\rho)$.

Pour former la solution correspondant à un certain des diviseurs élémentaires

$$\rho - \rho_{\lambda^{(i)}},$$

$\lambda^{(i)}$ étant un des nombres $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{r^{(i)}}^{(i)}$, on peut poser

$$g_{\lambda^{(i)}}^{(0)}(\rho) = \varepsilon_{\lambda^{(i)}} \cdot (\rho - \rho_i)^i$$

$$g_{\alpha}^{(0)}(\rho) = 0 \text{ pour } \alpha \neq \lambda^{(i)}.$$

Soit $\zeta_{\alpha}(x, \rho)_{\lambda^{(i)}}$ les séries calculées dans ces conditions; on trouve

$$P_{\lambda^{(i)}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \zeta_1, \dots, \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \zeta_n \right) = \varepsilon_{\lambda^{(i)}} \cdot (\rho - \rho_i)^{i+1} \cdot \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)}$$

$$P_{\alpha} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \zeta_1, \dots, \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \zeta_n \right) = 0 \text{ si } \alpha \neq \lambda^{(i)}.$$

Par suite, les $i + 1$ expressions

$$(48) \quad z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, h)} = \left[\frac{\partial^h}{\partial \rho^h} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho)_{\lambda^{(i)}} \right) \right]_{\rho=\rho_i}$$

ou

$$(49) \quad z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, h)} = \sum_{s=0}^h \binom{h}{s} \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho_i^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}^{(h-s)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}.$$

$$h = 0, 1, 2, \dots, i,$$

seront des solutions du système (B).

Mais des formules 12 b, 12 c, ... on tire pour les $g_{\alpha}^{(\nu)}(\rho)$ les expressions

$$g_{\alpha}^{(\nu)}(\rho) = \frac{Q_{\alpha, \lambda^{(i)}(\rho)}{Q(\rho + 1) Q(\rho + 2) \dots Q(\rho + \nu)} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(i)}} \cdot (\rho - \rho_i)^i,$$

où l'on a posé

$$Q(\rho) = (\rho - \rho_0)(\rho - \rho_1) \dots (\rho - \rho_m),$$

et où $Q_{\alpha, \lambda^{(i)}(\rho)}$ est une fonction rationnelle de ρ , ne devenant pas infinie pour $\rho = \rho_i$.

Par suite, pour $\rho = \rho_i$

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{ll} g_{\alpha}^{(0)}, \dots, g_{\alpha}^{(d^{(i)}-1)} & \text{s'annulent au degré } i \\ g_{\alpha}^{(d^{(i)})}, \dots, g_{\alpha}^{(d^{(i)}+d^{(i-1)}-1)} & \text{s'annulent au degré } i-1 \\ \dots & \dots \\ g_{\alpha}^{(d^{(i)}+\dots+d^{(2)})}, \dots, g_{\alpha}^{(d^{(i)}+\dots+d^{(1)}-1)} & \text{s'annulent au degré } 1. \end{array} \right.$$

Mais nous cherchons des solutions telles que les termes constants ne s'annulent pas tous.

Par suite, parmi les $i+1$ solutions (49) nous allons choisir la suivante

$$(51) \quad z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, i)} = \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho_i^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}^{(i-s)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}.$$

En effet, les termes constants de $z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, i)}$ ne s'annulent pas tous parce que

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial \rho_i^i} (\varepsilon_{\lambda^{(i)}} \cdot (\rho - \rho_i)^i) \right]_{\rho=\rho_i}$$

ne s'évanouit pas.

Appartenant au groupe donné de racines, on aura donc les solutions

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{\alpha}^{\lambda^{(0)}} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda^{(0)}}, \\ z_{\alpha}^{\lambda^{(1)}} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_1)} \cdot \zeta_{\alpha}^{(1)}(x, \rho_1)_{\lambda^{(1)}} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_1)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_1)_{\lambda^{(1)}}, \\ \dots \\ z_{\alpha}^{\lambda^{(m)}} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_m)} \cdot \zeta_{\alpha}^{(m)}(x, \rho_m)_{\lambda^{(m)}} + \binom{m}{1} \frac{\partial}{\partial \rho_m} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_m)} \right) \zeta_{\alpha}^{(m-1)}(x, \rho_m)_{\lambda^{(m)}} + \dots + \frac{\partial^m}{\partial \rho_m^m} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_m)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_m)_{\lambda^{(m)}} \end{array} \right.$$

$$\lambda^{(0)} = \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{r^{(0)}}^{(0)}, \dots, \lambda^{(m)} = \lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \dots, \lambda_{r^{(m)}}^{(m)}.$$

En reprenant les calculs pour les autres groupes de racines, on trouve donc n solutions, appartenant aux n racines de l'équation caractéristique. Elles forment un système fondamental de solutions, c'est ce qu'on démontre en se servant du déterminant des solutions et en tenant compte du fait que le déterminant $|g_{\alpha\beta}^{(0)}|$ ne s'annule pas.

10. On peut donner aux expressions (52) de nos solutions une forme un peu différente, en introduisant, au lieu des fonctions $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)}$ et de leurs dérivées, des puissances de $\log \left(\frac{1}{x}\right)$.

M. NÖRLUND a démontré* que la fonction

$$(53) \quad x^\rho \cdot \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} = \Omega(x)$$

admet un développement en série de facultés de la forme

$$\Omega(x) = 1 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{x(x+1) \dots (x+s)},$$

la série étant convergente pourvu que $\Re(x + \rho) > 0$ et $\Re(x) > 0$. La série étant uniformément convergente par rapport à ρ , on peut dériver un nombre quelconque de fois par rapport à ρ .

En introduisant ce développement dans l'expression (48), on trouve pour les solutions (52) le développement

$$(54) \quad z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, i)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_i} \cdot \sum_{\nu=0}^i \binom{i}{\nu} \cdot \log^{\nu} \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{\partial^{i-\nu}}{\partial \rho_i^{i-\nu}} \left(\Omega(x) \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}} \right).$$

Les coefficients des puissances de $\log \left(\frac{1}{x}\right)$ sont donc des séries de facultés, convergentes resp. sommables d'ordre r pourvu que $\Re(x) > 0$, $\Re(x + \rho_i) > 0$, $\Re(x + 1) > \lambda$ resp. λ_r . Nous pouvons dire que les solutions (52) ou (54) appartiennent à l'exposant ρ_i .

11. A côté des solutions (52) que nous voulons appeler les solutions canoniques, il existe, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 9, un nombre d'autres solutions

$$z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, h)} = \sum_{s=0}^h \binom{h}{s} \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho_i^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}^{(h-s)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}$$

$$h = 0, 1, 2, \dots, i-1; \quad \lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{r(i)}^{(i)}.$$

Nous allons démontrer que ces solutions sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des solutions canoniques.

* Sur les séries de facultés p. 368.

Considérons, en effet, la solution

$$z_\alpha^{\lambda^{(i)}} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \zeta_\alpha(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} z_\alpha^{\lambda^{(i)}} &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\rho_0 - \rho_i - 1} \frac{g_\alpha^{(\nu)}(\rho_i)}{(x + \rho_i)(x + \rho_i + 1) \dots (x + \rho_i + \nu - 1)} + \\ &+ \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)} \cdot \sum_{\nu=\rho_0 - \rho_i}^{\infty} \frac{g_\alpha^{(\nu)}(\rho_i)}{(x + \rho_0)(x + \rho_0 + 1) \dots (x + \rho_i + \nu - 1)} . \\ \rho_0 - \rho_i &= d^{(i)} + d^{(i-1)} + \dots + d^{(1)} . \end{aligned}$$

Mais les coefficients $g_\alpha^{(0)}, g_\alpha^{(1)}, \dots, g_\alpha^{(\rho_0 - \rho_i - 1)}$ s'annulent tous pour $\rho = \rho_i$, c'est ce que nous avons vu dans le paragraphe 9. Le premier terme au second membre est donc égal à zéro. Mais tous les $g_\alpha^{(\rho_0 - \rho_i)}$ ne s'annulent pas pour $\rho = \rho_i$. Les $z_\alpha^{\lambda^{(i)}}$ appartiennent donc à l'exposant ρ_0 et ils ne peuvent différer des $z_\alpha^{\lambda^{(0)}}$ que par un facteur constant.

Considérons de même la solution

$$z_\alpha^{(\lambda^{(0)}, 1)} = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \zeta_\alpha(x, \rho)_{\lambda^{(0)}} \right) \right]_{\rho=\rho_i} ,$$

expression qui peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} z_\alpha^{(\lambda^{(0)}, 1)} &= \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\rho_0 - \rho_i - 1} \frac{g_\alpha^{(\nu)}(\rho)}{(x + \rho)(x + \rho + 1) \dots (x + \rho + \nu - 1)} \right) \right]_{\rho=\rho_i} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \sum_{\nu=\rho_0 - \rho_i}^{\infty} \frac{g_\alpha^{(\nu)}(\rho)}{(x + \rho)(x + \rho + 1) \dots (x + \rho + \nu - 1)} \right) \right]_{\rho=\rho_i} . \end{aligned}$$

Le premier terme au second membre est égal à zéro car les $g_\alpha^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, \rho_0 - \rho_i - 1$) s'annulent au degré 2 au moins. Le dernier terme est égal à

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_1 + \rho - \rho_i)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(x + \rho_1 + \rho - \rho_i) \cdot g_\alpha^{(\nu + \rho_1 - \rho_i)}(\rho)}{\Gamma(x + \rho_1 + \rho - \rho_i + \nu)} \right) \right]_{\rho=\rho_i} ,$$

en remarquant que nous avons

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \sum_{\nu=\rho_1 - \rho_i}^{\infty} \frac{\Gamma(x + \rho) \cdot g_\alpha^{(\nu)}(\rho)}{\Gamma(x + \rho + \nu)} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(x + \rho) \cdot g_\alpha^{(\nu + \rho_1 - \rho_i)}(\rho)}{\Gamma(x + \rho + \rho_1 - \rho_i + \nu)} .$$

Mais les $g_\alpha^{(\rho_1 - \rho_i)}(\rho_i)$ ne peuvent différer des $g_\alpha^{(0)}(\rho_1)$ que par des facteurs constants.

$$\mathcal{L}_\alpha^{(\lambda^{(i)}, 1)} \quad (\lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{l^{(i)}}^{(i)})$$
$$\mathcal{S}_n^{(\lambda^{(1)}, 1)} \quad (\lambda^{(1)} = \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{r^{(1)}}^{(1)})$$

De la même manière on démontre que les solutions

$$\lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{l^{(i)}}^{(i)}$$

$$\mathcal{E}_\alpha^{(\lambda^{(h)}, h)} \quad (\lambda^{(h)} = \lambda_1^{(h)}, \lambda_2^{(h)}, \dots, \lambda_{r^{(h)}}^{(h)}),$$

$$h = 2, 3, \dots, i - 1$$

12. Soit ρ_0 une racine multiple de l'équation caractéristique et supposons que le minant caractéristique ait les diviseurs élémentaires

$$(\rho - \rho_0)^{\epsilon_\lambda} \text{ pour } \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r.$$

Nous supposons qu'il corresponde au diviseur élémentaire

$$(\rho - \rho_0)^{e_k},$$

Pour calculer les solutions correspondant à ce diviseur élémentaire, nous posons

[illegible]

Soient $\xi_\alpha(x, \rho)$ les séries calculées en partant de ces valeurs pour les $g_\alpha^{(0)}$.

$$\begin{aligned} P_{\alpha'} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \cdot \zeta_1, \dots, \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \cdot \zeta_n \right) &= \varepsilon_\lambda \cdot (\rho - \rho_0)^{e_\lambda} \cdot \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \\ P_\alpha \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \cdot \zeta_1, \dots, \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \cdot \zeta_n \right) &= 0, \quad \alpha \neq \alpha'. \end{aligned}$$

Satisfaisant à notre système d'équations homogènes, on obtient les solutions

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_\alpha^{\mu^{(0)}} = \left[\frac{\partial^{\mu^{(0)}}}{\partial \rho^{\mu^{(0)}}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \cdot \zeta_\alpha(x, \rho)_{\lambda^{(i)}} \right) \right]_{\rho=\rho_i} \quad \mu^{(0)} = 0, 1, 2, \dots, l^{(0)} - 1, \\ \mathcal{E}_\alpha^{\mu^{(1)}} = \left[\frac{\partial^{\mu^{(1)}}}{\partial \rho^{\mu^{(1)}}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \cdot \zeta_\alpha(x, \rho)_{\lambda^{(i)}} \right) \right]_{\rho=\rho_i} \quad \mu^{(1)} = l^{(0)}, l^{(0)} + 1, \dots, l^{(1)} - 1, \\ \dots \\ \mathcal{E}_\alpha^{\mu^{(i-1)}} = \left[\frac{\partial^{\mu^{(i-1)}}}{\partial \rho^{\mu^{(i-1)}}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \cdot \zeta_\alpha(x, \rho)_{\lambda^{(i)}} \right) \right]_{\rho=\rho_i} \quad \mu^{(i-1)} = l^{(i-2)}, l^{(i-2)} + 1, \dots, l^{(i-1)} - 1, \\ \mathcal{E}_\alpha^{\mu_{\lambda^{(i)}}^{(i)}} = \left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^{(i)}}^{(i)}}}{\partial \rho^{\mu_{\lambda^{(i)}}^{(i)}}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \cdot \zeta_\alpha(x, \rho)_{\lambda^{(i)}} \right) \right]_{\rho=\rho_i} \quad \mu_{\lambda^{(i)}}^{(i)} = l^{(i-1)}, l^{(i-1)} + 1, \dots, l_{\lambda^{(i)}} - 1. \end{array} \right.$$

Ensuite, les formules 12 b, 12 c, ... nous donnent pour les $g_\alpha^{(\nu)}$ les expressions suivantes

$$g_\alpha^{(\nu)} = \sum_{h=1}^{h=e_{\lambda^{(i)}}} \frac{Q_{\alpha, \alpha_h}^{(\nu)} \cdot (\rho - \rho_i)^{h-1}}{Q(\rho+1) Q(\rho+2) \dots Q(\rho+\nu)} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(i)}} \cdot (\rho - \rho_i)^{l^{(i-1)}},$$

où l'on a posé

$$Q(\rho) = (\rho - \rho_0)^{e^{(0)}} \cdot (\rho - \rho_1)^{e^{(1)}} \cdot \dots \cdot (\rho - \rho_m)^{e^{(m)}}$$

$Q_{\alpha, \alpha_h}^{(\nu)}$ est une fonction de ρ ne devenant pas infinie pour $\rho = \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m$.

Par conséquent, pour $\rho = \rho_i$

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{ll} g_\alpha^{(0)}, \dots, g_\alpha^{(d^{(i)}-1)} & \text{s'annulent au degré } l^{(i-1)} \\ g_\alpha^{(d^{(i)})}, \dots, g_\alpha^{(d^{(i)}+d^{(i-1)}-1)} & \text{» » » } l^{(i-2)} \\ \dots & \dots \\ g_\alpha^{(d^{(i)}+d^{(i-1)}+\dots+d^{(3)})}, \dots, g_\alpha^{(d^{(i)}+d^{(i-1)}+\dots+d^{(2)}-1)} & \text{» » » } l^{(1)} \\ g_\alpha^{(d^{(i)}+d^{(i-1)}+\dots+d^{(2)})}, \dots, g_\alpha^{(d^{(i)}+d^{(i-1)}+\dots+d^{(1)}-1)} & \text{» » » } l^{(0)}. \end{array} \right.$$

Par suite, il n'y a pas de terme constant dans les séries

$$\left[\frac{\partial^{\mu^{(0)}}}{\partial \rho^{\mu^{(0)}}} \zeta_\alpha(x, \rho)_{\lambda^{(i)}} \right]_{\rho=\rho_i}, \dots, \left[\frac{\partial^{\mu^{(i-1)}}}{\partial \rho^{\mu^{(i-1)}}} \zeta_\alpha(x, \rho)_{\lambda^{(i)}} \right]_{\rho=\rho_i}.$$

Mettons de côté toutes les solutions (59) sauf les $e_{\lambda^{(i)}}$ solutions suivantes appartenant à l'exposant ρ_i

$$(61) \quad z_{\alpha} = \sum_{s=0}^{s=\mu_{\lambda^{(i)}}} \binom{\mu_{\lambda^{(i)}}}{s} \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho_i^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}},$$

$$\mu_{\lambda^{(i)}} = l^{(i-1)}, \quad l^{(i-1)} + 1, \dots, l_{\lambda^{(i)}} - 1,$$

car, d'après (57), nous voyons que les termes constants des séries

$$\zeta_{\alpha_1}^{(e_{\lambda^{(i)}} - 1)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}, \dots, \zeta_{\alpha_{e_{\lambda^{(i)}}}}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}$$

ne sont pas nuls.

Appartenant au groupe donné de racines, on trouve donc les solutions canoniques suivantes

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{\alpha, \lambda^{(0)}}^{\mu_{\lambda^{(0)}}} = \sum_{s=0}^{s=\mu_{\lambda^{(0)}}} \binom{\mu_{\lambda^{(0)}}}{s} \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho_0^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda^{(0)}}, \\ \mu_{\lambda^{(0)}} = 0, 1, 2, \dots, e_{\lambda^{(0)}} - 1; \lambda^{(0)} = \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{r^{(0)}}^{(0)}. \\ \\ z_{\alpha, \lambda^{(1)}}^{\mu_{\lambda^{(1)}}} = \sum_{s=0}^{s=\mu_{\lambda^{(1)}}} \binom{\mu_{\lambda^{(1)}}}{s} \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho_1^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_1)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_1)_{\lambda^{(1)}}, \\ \mu_{\lambda^{(1)}} = e^{(0)}, e^{(0)} + 1, \dots, e^{(0)} + e_{\lambda^{(1)}} - 1; \lambda^{(1)} = \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{r^{(1)}}^{(1)}, \\ \\ \dots \\ z_{\alpha, \lambda^{(m)}}^{\mu_{\lambda^{(m)}}} = \sum_{s=0}^{s=\mu_{\lambda^{(m)}}} \binom{\mu_{\lambda^{(m)}}}{s} \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho_m^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_m)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_m)_{\lambda^{(m)}}, \\ \mu_{\lambda^{(m)}} = e^{(0)} + e^{(1)} + \dots + e^{(m-1)}, \quad e^{(0)} + e^{(1)} + \dots + e^{(m-1)} + 1, \dots, \\ e^{(0)} + e^{(1)} + \dots + e^{(m-1)} + e_{\lambda^{(m)}} - 1. \\ \lambda^{(m)} = \lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \dots, \lambda_{r^{(m)}}^{(m)}. \end{array} \right.$$

Les solutions appartenant à ce groupe sont linéairement indépendantes. En reprenant le même procédé pour les autres groupes de racines de l'équation caractéristique, on arrive à un système fondamental de solutions.

En effet, le déterminant des termes constants

$$|g_{\alpha\beta}^{(0)}| \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n,$$

est égal à une constante différente de nul. En formant le déterminant des n solutions, on trouve donc comme dans le paragraphe 5 que ce déterminant ne peut pas s'annuler identiquement. Les solutions sont donc linéairement indépendantes.

14. Nous pouvons, comme nous l'avons fait dans le paragraphe **10** introduire des puissances de la fonction $\log\left(\frac{1}{x}\right)$, au lieu des fonctions $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho_i)}$ et de leurs dérivées par rapport à ρ_i , dans les expressions (62) de nos solutions.

Considérons donc le groupe donné par

$$z_{\alpha} = \left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^{(i)}}}}{\partial \rho^{\mu_{\lambda^{(i)}}}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho)_{\lambda^{(i)}} \right) \right]_{\rho=\rho_i}$$

$$\mu_{\lambda^{(i)}} = l^{(i-1)}, l^{(i-1)} + 1, \dots, l_{\lambda^{(i)}} - 1.$$

En introduisant le développement

$$(53) \quad \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho} \cdot \Omega(x),$$

on trouve

$$(63) \quad z_{\alpha} = z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{\mu_{\lambda^{(i)}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_i} \cdot \sum_{s=0}^{s=\mu_{\lambda^{(i)}}} \binom{\mu_{\lambda^{(i)}}}{s} \cdot \log^s \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{\partial^{\mu_{\lambda^{(i)}}-s}}{\partial \rho^{\mu_{\lambda^{(i)}}-s}} \left(\Omega(x) \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}} \right).$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m; \quad \lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{r(i)}^{(i)}.$$

Les séries de facultés qui représentent les coefficients des diverses puissances de $\log\left(\frac{1}{x}\right)$ sont convergentes resp. sommables d'ordre r pourvu que

$$(63^*) \quad \Re(x) > 0, \Re(x+\rho_i) > 0, \Re(x+1) > \lambda \text{ resp. } \lambda_r.$$

Les deux formes (62) et (63) sont donc les expressions les plus générales de nos solutions canoniques.

15. A l'aide des expressions (63), on peut déterminer, avec autant d'approximation que l'on veut, les expressions asymptotiques de nos solutions en supposant que x tende vers l'infini en restant dans le domaine de convergence des séries de facultés. Mais une série de facultés $\Omega(x)$ tend vers son premier terme, qui est une constante, quand x tend vers l'infini en restant dans le demi-plan de convergence. On trouve

$$z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{\mu_{\lambda^{(i)}}} \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_i} \cdot \log^{\mu_{\lambda^{(i)}}} \left(\frac{1}{x}\right) \cdot g_{\alpha}^{(0)}(\rho_i).$$

$$\mu_{\lambda^{(i)}} = l^{(i-1)}, \dots, l_{\lambda^{(i)}} - 1,$$

en nous bornant au premier terme de l'expression asymptotique.

Donc, à chaque solution canonique $z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{\mu_{\lambda^{(i)}}}$ de (B) il appartient un nombre ρ_i , indépendant de x , et un nombre entier positif $\mu_{\lambda^{(i)}}$, de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{\mu_{\lambda^{(i)}}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_i} \cdot \log^{\mu_{\lambda^{(i)}}}\left(\frac{1}{x}\right)} = \text{const.},$$

x tendant vers l'infini en restant dans le demi-plan défini par les inégalités (63*). En vertu de la formule (43*) du paragraphe 6, le même résultat vaut encore pour le système canonique général (A).

16. A côté des solutions canoniques, les formules (59) nous donnent d'autres solutions du système (B). Nous voulons maintenant discuter comment elles se rattachent à notre système fondamental de solutions canoniques.

Considérons d'abord les expressions

$$(64) \quad z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{\mu^{(0)}} = \sum_{s=0}^{\mu^{(0)}} \binom{\mu^{(0)}}{s} \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho_i^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}^{(\mu^{(0)} - s)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}$$

$$\mu^{(0)} = 0, 1, 2, \dots, e^{(0)} - 1.$$

$\lambda^{(i)}$ désignant un des nombres

$$\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{r(i)}^{(i)}.$$

Appartenant à la valeur $\mu^{(0)} = 0$, nous obtenons les solutions

$$z_{\alpha, \lambda^{(i)}} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}$$

ou encore

$$(65) \quad z_{\alpha, \lambda^{(i)}} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\rho_0 - \rho_i - 1} \frac{g_{\alpha}^{(\nu)}(\rho_i)}{(x + \rho_i)(x + \rho_i + 1) \dots (x + \rho_i + \nu - 1)} +$$

$$+ \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)} \cdot \sum_{\nu=\rho_0 - \rho_i}^{\infty} \frac{g_{\alpha}^{(\nu)}(\rho_i)}{(x + \rho_0)(x + \rho_0 + 1) \dots (x + \rho_i + \nu - 1)}$$

car nous avons

$$\rho_0 - \rho_i = d^{(i)} + d^{(i-1)} + \dots + d^{(1)}$$

égal à un nombre entier positif.

Mais nous savons d'après les formules (60) que pour $\rho = \rho_i$ les nombres

$$g_{\alpha}^{(0)}, g_{\alpha}^{(1)}, \dots, g_{\alpha}^{(d^{(i)} + d^{(i-1)} + \dots + d^{(1)} - 1)}$$

s'annulent tous au degré $e^{(0)}$ au moins. Donc, le premier terme au second membre de (65) est égal à zéro. Mais les

$$g_{\alpha}^{(\rho_0 - \rho_i)}(\rho_i)_{\lambda^{(i)}}$$

ne s'annulent pas tous; le second terme ne peut donc différer d'une certaine des solutions

$$z_{\alpha, \lambda^{(0)}} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda^{(0)}} \quad (\lambda^{(0)} = \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{r^{(0)}}^{(0)}).$$

que par un facteur constant.

Procédons de la même manière avec les autres solutions. Correspondant au nombre $\mu^{(0)} = 1$, l'expression (64) nous donne la solution

$$z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{(1)} = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho)_{\lambda^{(i)}} \right) \right]_{\rho = \rho_i},$$

expression qui peut aussi s'écrire

$$(66) \quad z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{(1)} = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=\rho_0-\rho_i-1} \frac{g_{\alpha}^{(\nu)}(\rho)}{(x + \rho)(x + \rho + 1) \dots (x + \rho + \nu - 1)} \right) \right]_{\rho = \rho_i} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \sum_{\nu=\rho_0-\rho_i}^{\nu=\infty} \frac{g_{\alpha}^{(\nu)}(\rho)}{(x + \rho)(x + \rho + 1) \dots (x + \rho + \nu - 1)} \right) \right]_{\rho = \rho_i}$$

La première des parenthèses est égale à zéro. Quant à la seconde, nous remarquons qu'elle peut être mise sous la forme

$$(67) \quad \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0 + \rho - \rho_i)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\Gamma(x + \rho_0 + \rho - \rho_i)}{\Gamma(x + \rho_0 + \rho - \rho_i + \nu)} \cdot g_{\alpha}^{(\nu+\rho_0-\rho_i)}(\rho) \right) \right]_{\rho = \rho_i}.$$

Les $g_{\alpha}^{(\rho_0-\rho_i)}(\rho)_{\lambda^{(i)}}$ ne diffèrent des $g_{\alpha}^{(0)}(\rho)_{\lambda^{(0)}}$ que par des facteurs constants. En comparant cette expression avec l'expression

$$z_{\alpha, \lambda^{(0)}}^{(1)} = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho)_{\lambda^{(0)}} \right) \right]_{\rho = \rho_0},$$

on voit donc que les solutions

$$z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{(1)} \quad (\lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{r^{(i)}}^{(i)})$$

ne diffèrent des solutions

$$z_{\alpha, \lambda^{(0)}}^{(1)} \quad (\lambda^{(0)} = \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{r^{(0)}}^{(0)})$$

que par des facteurs constants.

De la même manière on peut traiter les autres solutions $z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{\mu^{(0)}}$. Donc, les solutions appartenant au groupe

$$z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{\mu^{(0)}} \quad (\mu^{(0)} = 0, 1, 2, \dots, e^{(0)} - 1; \lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{r^{(i)}}^{(i)})$$

ne diffèrent des solutions canoniques.

$$z_{\alpha, \lambda}^{\mu, \lambda^{(0)}} \quad (\mu_{\lambda^{(0)}} = 0, 1, 2, \dots, e_{\lambda^{(0)}} - 1; \lambda^{(0)} = \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{r^{(0)}}^{(0)})$$

que par des facteurs constants.

Considérons le second groupe des solutions (59)

$$z_{\alpha, \lambda}^{\mu^{(1)}} = \left[\frac{\partial^{\mu^{(1)}}}{\partial \rho^{\mu^{(1)}}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}^{(v)}(\rho)}{(x + \rho)(x + \rho + 1) \dots (x + \rho + v - 1)} \right) \right]_{\rho = \rho_i}$$

$$\mu^{(1)} = l^{(0)} + 1, \dots, l^{(1)} - 1 = e^{(0)} + 1, \dots, e^{(0)} + e^{(1)} - 1.$$

Pour $\mu^{(1)} = e^{(0)}$ cette expression peut s'écrire

$$z_{\alpha, \lambda}^{e^{(0)}} = \left[\frac{\partial^{e^{(0)}}}{\partial \rho^{e^{(0)}}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \sum_{v=0}^{\rho_1 - \rho_i - 1} \frac{g_{\alpha}^{(v)}(\rho)}{(x + \rho)(x + \rho + 1) \dots (x + \rho + v - 1)} \right) \right]_{\rho = \rho_i} +$$

$$(68) \quad + \left[\frac{\partial^{e^{(0)}}}{\partial \rho^{e^{(0)}}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \sum_{v=\rho_1 - \rho_i}^{\infty} \frac{g_{\alpha}^{(v)}(\rho)}{(x + \rho)(x + \rho + 1) \dots (x + \rho + v - 1)} \right) \right]_{\rho = \rho_i}$$

Mais, d'après les formules (57) nous savons que pour $\rho = \rho_i$ les

$$g_{\alpha}^{(0)}, g_{\alpha}^{(1)}, \dots, g_{\alpha}^{(\rho_1 - \rho_i - 1)}$$

s'annulent au degré $l^{(1)} = e^{(0)} + e^{(1)}$ au moins. Les nombres

$$g_{\alpha}^{(\rho_1 - \rho_i)}(\rho_i)_{\lambda^{(i)}}$$

s'annulent au degré $l^{(0)} = e^{(0)}$.

En comparant les solutions (68) avec les solutions canoniques

$$z_{\alpha, \lambda}^{e^{(0)}} = \left[\frac{\partial^{e^{(0)}}}{\partial \rho^{e^{(0)}}} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho)_{\lambda^{(1)}} \right) \right]_{\rho = \rho_1}$$

on trouve que les solutions

$$z_{\alpha, \lambda}^{e^{(0)}} \quad (\lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{r^{(i)}}^{(i)})$$

ne diffèrent des solutions canoniques

$$z_{\alpha, \lambda}^{e^{(0)}} \quad (\lambda^{(1)} = \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{r^{(1)}}^{(1)})$$

que par des facteurs constants. En effet, les termes $g_{\alpha}^{(0)}(\rho)_{\lambda^{(i)}}$ s'annulent pour $\rho = \rho_1$ au même degré $e^{(0)}$ que les termes

$$g_{\alpha}^{(\rho_1 - \rho_i)}(\rho_i)_{\lambda^{(i)}}$$

En procédant comme nous l'avons fait tout à l'heure, on arrive donc au résultat que les solutions

$$z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{\mu^{(1)}} \quad (\mu^{(1)} = e^{(0)}, e^{(0)} + 1, \dots, e^{(0)} + e^{(1)} - 1; \lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{r(i)}^{(i)})$$

sont différentes des solutions canoniques

$$z_{\alpha, \lambda^{(1)}}^{\mu_{\lambda^{(1)}}} \quad (\mu_{\lambda^{(1)}} = e^{(0)}, e^{(0)} + 1, \dots, e^{(0)} + e_{\lambda^{(1)}} - 1; \lambda^{(1)} = \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{r(1)}^{(1)})$$

des facteurs constants et plus généralement les solutions

$$z_{\alpha, \lambda^{(i)}}^{\mu^{(i-1)}} \quad (\mu^{(i-1)} = l^{(i-2)}, l^{(i-2)} + 1, \dots, l^{(i-1)} - 1; \lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{r(i)}^{(i)})$$

ne diffèrent des solutions canoniques

$$z_{\alpha, \lambda^{(i-1)}}^{\mu_{\lambda^{(i-1)}}} \quad (\mu_{\lambda^{(i-1)}} = l^{(i-2)}, l^{(i-2)} + 1, \dots, l_{\lambda^{(i-1)}} - 1; \lambda^{(i-1)} = \lambda_1^{(i-1)}, \lambda_2^{(i-1)}, \dots, \lambda_{r(i-1)}^{(i-1)})$$

que par des facteurs constants.

CHAPITRE III.

17. Maintenant nous allons faire le prolongement analytique de nos solutions canoniques définies par les formules (62) ou par les expressions analogues valables pour le système canonique général (A). A l'aide de ces expressions on voit que les solutions canoniques sont des fonctions analytiques holomorphes dans le domaine de convergence des séries en exceptant les points

$$x = 0, -1, -2, \dots$$

qui sont des pôles simples s'ils se trouvent dans le domaine de convergence.

Nous pouvons suivre, à peu près mot à mot, le procédé employé par M. NÖRLUND dans son travail concernant l'équation (1).

Le système (A) peut se mettre sous la forme suivante

$$(69) \quad u_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^n \frac{u_\lambda(x+1)}{x} (\delta_{\alpha\lambda} \cdot x - a_{\alpha\lambda}(x+1))$$

ou encore

$$(69^*) \quad u_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^n \frac{u_\lambda(x+1)}{x} \cdot P_{\alpha\lambda}(x)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n,$$

où l'on a posé

$$P_{\alpha\lambda}(x) = \delta_{\alpha\lambda} \cdot x - a_{\alpha\lambda}(x+1).$$

Si dans les équations (69*) nous écrivons, au lieu de x , successivement $x+1$, $x+2$, ..., $x+N$ et si nous éliminons

$$u(x+1), \quad u(x+2), \quad \dots, \quad u(x+N),$$

on trouve des relations

$$(70) \quad u_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^n \frac{u_\lambda(x+N+1)}{x(x+1) \dots (x+N)} \cdot \pi_{\alpha\lambda}(x).$$

Pour les $\pi_{\alpha\lambda}(x)$ on obtient des expressions qu'on peut représenter par

$$(\pi_{\alpha\lambda}(x)) = (P_{\alpha\lambda}(x)) (P_{\alpha\lambda}(x+1)) \dots (P_{\alpha\lambda}(x+N))$$

$$\alpha, \lambda = 1, 2, \dots, n,$$

en nous servant pour plus de simplicité de la notion de matrice.

Les $\pi_{\alpha\lambda}(x)$ sont donc des sommes de produits formés des fonctions

$$P_{\alpha\lambda}(x), P_{\alpha\lambda}(x+1), \dots, P_{\alpha\lambda}(x+N),$$

c'est ce qu'on voit immédiatement si l'on se rappelle le théorème de multiplication des matrices.

Supposons maintenant que les coefficients $a_{\alpha\lambda}(x)$ du système (A) soient des fonctions qui admettent un prolongement analytique dans tout domaine fini et qui ont pour points singuliers à distance finie les points

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \dots$$

dont le nombre peut être fini ou infini.

Les coefficients $P_{\alpha\lambda}(x)$ admettent les points singuliers suivants

$$\beta_1 - 1, \beta_2 - 1, \dots, \beta_m - 1, \dots$$

et, par suite, les $\pi_{\alpha\lambda}(x)$ ont les points singuliers

$$\beta_i - s \quad i = 1, 2, 3, \dots; s = 1, 2, \dots, N+1.$$

A l'aide des équations (70), nous pouvons faire le prolongement des fonctions $u_\alpha(x)$ dans un domaine fini quelconque C , car on peut toujours choisir le nombre N suffisamment grand pour que les séries de facultés qui représentent les fonctions

$$u_\alpha(x+N+1)$$

soient convergentes quel que soit x en C .

Des formules (70) il résulte donc que les solutions canoniques ne peuvent admettre comme points singuliers à distance finie d'autres que les points

$$0, -1, -2, \dots$$

qui sont des pôles simples et les points

$$\beta_i - s \quad s = 1, 2, \dots, N+1; i = 1, 2, 3, \dots$$

Au voisinage des points $\beta_i - s$, les solutions canoniques se comportent comme des fonctions rationnelles entières des expressions

$$P_{\alpha\lambda}(x+s) \quad s = 0, 1, 2, \dots, N$$

avec des coefficients qui sont des fonctions holomorphes dans le voisinage des points respectifs, c'est à dire comme des fonctions rationnelles entières des fonctions $a_{\alpha\lambda}(x+1)$ et de leurs différences successives.

Tous les théorèmes énoncés par M. NÖRLUND dans son travail p. 24 sont donc valables pour le système canonique (A).

18. Aux points singuliers à distance finie il faut ajouter le point à l'infini. Nous avons vu dans le paragraphe 15 comment se comportent les solutions canoniques quand x tend vers l'infini en restant dans le domaine de convergence des séries de facultés qui représentent les coefficients dans les expressions (63).

Mais les expressions asymptotiques sont valables en des domaines plus étendus. En effet, considérons notre système sous la forme

$$(69^*) \quad u_a(x) = \sum_{\lambda=1}^n u_\lambda(x+1) \cdot \frac{P_{a\lambda}(x)}{x},$$

et remarquons qu'on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} \frac{P_{a\lambda}(x)}{x} = \delta_{a\lambda}$$

quand x tend vers l'infini en restant dans le demi-plan $\Re(x) > \lambda - 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$); il est même suffisant, comme l'a remarqué M. NÖRLUND, de supposer que $\Re(x)$ soit plus grand que $\Lambda - 1 + \varepsilon$, Λ désignant la limite vers laquelle tendent les abscisses de sommabilité

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

des coefficients quand n tend vers l'infini.

Les équations (69*) montrent donc que les expressions asymptotiques que nous avons obtenu dans le paragraphe 15 subsistent encore, pourvu que x tend vers l'infini en restant dans le demi-plan

$$(71) \quad \Re(x) > \Lambda - 1 + \varepsilon.$$

Nous avons donc obtenu le théorème suivant: *Les n solutions canoniques du système (A) forment un système fondamental de solutions. Elles sont des fonctions analytiques, holomorphes dans le demi-plan $\Re(x) > \Lambda - 1$ en exceptant les points*

$$0, -1, -2, \dots$$

qui sont des pôles simples pour les solutions s'ils se trouvent dans le demi-plan $\Re(x) > \Lambda - 1$.

Les expressions asymptotiques obtenus dans le paragraphe 15 subsistent encore pourvu que x tend vers l'infini en restant dans le demi-plan

$$\Re(x) > \Lambda - 1 + \varepsilon.$$

CHAPITRE IV.

19. Nous allons traiter dans ce chapitre la question inverse à celle dont nous nous sommes occupés dans les chapitres précédents. Nous allons partir de n systèmes de fonctions, linéairement indépendantes, ayant les mêmes propriétés que les solutions obtenues dans les chapitres précédents et nous allons déterminer la forme du système d'équations aux différences finies linéaires et homogènes du premier ordre admettant ce système fondamental de fonctions comme solutions.

D'abord nous allons démontrer le lemme préliminaire suivant:

Un système d'équations aux différences finies linéaires et homogènes du premier ordre admettant comme solutions les n systèmes de fonctions linéairement indépendantes

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & n. \\
 u_{11}(x) & & u_{12}(x) & \dots & u_{1n}(x) \\
 u_{21}(x) & & u_{22}(x) & \dots & u_{2n}(x) \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 u_{n1}(x) & & u_{n2}(x) & \dots & u_{nn}(x)
 \end{array}$$

peut toujours se mettre sous la forme

$$(D) \quad \left| \begin{array}{cccc}
 \Delta_{-1} u_{\alpha}(x), & u_1(x), & u_2(x), & \dots, & u_n(x) \\
 \Delta_{-1} u_{\alpha_1}(x), & u_{11}(x), & u_{21}(x), & \dots, & u_{n1}(x) \\
 \Delta_{-1} u_{\alpha_2}(x), & u_{12}(x), & u_{22}(x), & \dots, & u_{n2}(x) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \Delta_{-1} u_{\alpha_n}(x), & u_{1n}(x), & u_{2n}(x), & \dots, & u_{nn}(x)
 \end{array} \right| = 0.$$

$\alpha = 1, 2, \dots, n.$

En effet, en substituant, au lieu des fonctions $u_{\alpha}(x)$, les n systèmes indiqués de solutions, les n déterminants (D) se réduisent à zéro, car alors ils possèdent deux lignes identiques. Mais ils ne s'annulent pas identiquement en ce que les systèmes de fonctions forment un système fondamental et, par suite, le déterminant

$$\begin{array}{c}
 | u_{\alpha\beta}(x) | \\
 \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n
 \end{array}$$

ne s'annule pas identiquement.

20. Nous allons déterminer la forme d'un système d'équations aux différences qui admet un système fondamental de solutions régulières de la forme

$$(72) \quad u_{\alpha\beta}(x) = u_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_\beta)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha\beta}^{(\nu)}(\rho_\beta)}{(x + \rho_\beta)(x + \rho_\beta + 1) \dots (x + \rho_\beta + \nu - 1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_\beta)} \cdot \zeta_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta).$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n.$$

les séries de facultés étant convergentes pourvu que $\Re(x) > \lambda - 1$. *

Supposons d'abord que les solutions (72) soient de la forme canonique, c'est à dire que le déterminant

$$\begin{vmatrix} g_{\alpha\beta}^{(0)} \end{vmatrix}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

soit différent de nul.

En formant les expressions $-(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha\beta}(x)$, on trouve

$$-(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha\beta}(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_\beta)} \cdot v_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta),$$

les $v_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)$ désignant les séries

$$v_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha\beta}^{(\nu)}(\rho_\beta) \cdot (\rho_\beta + \nu)}{(x + \rho_\beta)(x + \rho_\beta + 1) \dots (x + \rho_\beta + \nu - 1)},$$

convergentes si l'on a $\Re(x) > \lambda$.

En substituant les fonctions (72) dans les déterminants (D), après avoir multiplié la première colonne par $-(x-1)$, et en supprimant dans les n dernières lignes les facteurs

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_1)}, \quad \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_2)}, \quad \dots, \quad \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_n)}$$

on trouve les déterminants suivants:

$$(73) \quad \begin{vmatrix} -(x-1) \Delta_{-1} u_\alpha(x), & u_1(x), & u_2(x), & \dots, & u_n(x) \\ v_{\alpha 1}(x, \rho_1), & \zeta_{11}(x, \rho_1), & \zeta_{21}(x, \rho_1), & \dots, & \zeta_{n1}(x, \rho_1) \\ v_{\alpha 2}(x, \rho_2), & \zeta_{12}(x, \rho_2), & \zeta_{22}(x, \rho_2), & \dots, & \zeta_{n2}(x, \rho_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{\alpha n}(x, \rho_n), & \zeta_{1n}(x, \rho_n), & \zeta_{2n}(x, \rho_n), & \dots, & \zeta_{nn}(x, \rho_n) \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n.$$

* On suppose que les solutions appartiennent aux exposants ρ_β , c'est à dire, que pour β égal à une certaine de ses valeurs, tous les nombres $g_{\alpha\beta}^{(0)}$ ne s'annulent pas.

En développant les déterminants suivant les éléments de la première ligne, on voit qu'on peut mettre le système sous la forme

$$(x-1)\Delta_{-1}u_{\alpha}(x) = \sum_{\lambda=1}^n a_{\alpha\lambda}(x) \cdot u_{\lambda}(x).$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Les fonctions $a_{\alpha\lambda}(x)$ qui sont les mineurs des éléments de la première ligne divisés par le déterminant

$$(74) \quad \left| \zeta_{\alpha\beta}(x, \rho_{\beta}) \right| \neq 0.$$

Elles sont donc des fonctions développables en séries de facultés convergentes pourvu que $\Re(x) > 0$ $\Re(x) > \lambda$.

Le terme constant de la série de facultés qu'on obtient en développant le déterminant (74) est donné par le déterminant

$$\left| g_{\alpha\beta}^{(0)}(\rho_{\beta}) \right|$$

qui est, par hypothèse, différent de nul.

Écrivons les expressions obtenues pour les fonctions $a_{\alpha\lambda}(x)$:

$$(-1)^{\lambda} \cdot \left| \zeta_{\alpha\beta}(x, \rho_{\beta}) \right| \cdot a_{\alpha\lambda}(x) = \left| \begin{array}{cccccc} v_{\alpha 1}(x, \rho_1), & \zeta_{11}(x, \rho_1), & \dots & \zeta_{\lambda-1, 1}(x, \rho_1), & \zeta_{\lambda+1, 1}(x, \rho_1), & \dots & \zeta_{n1}(x, \rho_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{\alpha n}(x, \rho_n), & \zeta_{1n}(x, \rho_n), & \dots & \zeta_{\lambda-1, n}(x, \rho_n), & \zeta_{\lambda+1, n}(x, \rho_n), & \dots & \zeta_{nn}(x, \rho_n) \end{array} \right|$$

Les termes constants $a_{\alpha\lambda}^{(0)}$ des séries de facultés représentant les fonctions $a_{\alpha\lambda}(x)$ deviennent

$$(-1)^{\lambda} \cdot \left| g_{\alpha\beta}^{(0)}(\rho_{\beta}) \right| a_{\alpha\lambda}^{(0)} = \left| \begin{array}{cccccc} \rho_1 \cdot g_{\alpha 1}^{(0)}(\rho_1), & g_{11}^{(0)}(\rho_1), & \dots, & g_{\lambda-1, 1}^{(0)}(\rho_1), & g_{\lambda+1, 1}^{(0)}(\rho_1), & \dots & g_{n1}^{(0)}(\rho_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_n \cdot g_{\alpha n}^{(0)}(\rho_n), & g_{1n}^{(0)}(\rho_n), & \dots, & g_{\lambda-1, n}^{(0)}(\rho_n), & g_{\lambda+1, n}^{(0)}(\rho_n), & \dots & g_{nn}^{(0)}(\rho_n) \end{array} \right|$$

Notre système est donc nécessairement de la forme canonique (A).

Pour déterminer les racines de l'équation caractéristique, nous allons assujettir le système à une transformation linéaire à des coefficients constants, ce que ne trouble pas les diviseurs élémentaires du déterminant caractéristique. Nous voulons choisir la substitution linéaire qui transforme les $g_{\alpha\beta}^{(0)}$ en $\delta_{\alpha\beta}$.

Nous aurons donc pour les termes constants $b_{\alpha\lambda}^{(0)}$ des coefficients $b_{\alpha\lambda}(x)$ du nouveau système les expressions suivantes

$$(-1)^{\nu} \cdot b_{\alpha\lambda}^{(0)} = \left| \begin{array}{cccccc} \rho_1 \cdot \delta_{\alpha 1}, & 1, & 0, & 0 \dots, & 0 \\ \rho_2 \cdot \delta_{\alpha 2}, & 0, & 1, & 0 \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_n \cdot \delta_{\alpha n}, & 0, & 0, & 0 \dots, & 1 \end{array} \right|$$

Par conséquent, tous les nombres $b_{\alpha\lambda}^{(0)}$ s'annulent sauf les $b_{\alpha\alpha}^{(0)}$ qui deviennent

$$b_{\alpha\alpha}^{(0)} = -\rho_\alpha.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc les nombres

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n.$$

De plus, on voit que, si plusieurs des nombres ρ_α sont égaux entre eux, il ne correspond que des diviseurs élémentaires simples du déterminant caractéristique.

21. Maintenant nous allons considérer le cas général où les solutions données sont telles que le déterminant

$$(74) \quad \begin{aligned} & \left| \xi_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta) \right| \\ & \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

s'annule d'un ordre fini, quand x tend vers l'infini en restant dans le demi-plan de convergence des séries de facultés. Il ne peut pas manquer qu'un nombre fini des termes premiers dans la série de facultés représentant le déterminant (74), car autrement les solutions n'auraient pas pu former un système fondamental de solutions.

En reprenant les calculs sous ces conditions, on voit que les coefficients $a_{\alpha\lambda}(x)$ du système obtenu se représentent par des séries de facultés ayant une abscisse de convergence finie, mais le système ainsi construit n'est pas de la forme canonique.

On peut cependant, par des substitutions simples, ramener ces systèmes à la forme canonique. Nous allons étudier ces transformations en nous servant d'une méthode de réduction employée par M. SCHLESINGER aux systèmes correspondants d'équations différentielles.*

Supposons que les solutions données (72) soient transformées en les expressions suivantes

$$(75) \quad u_{\alpha\beta}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_\beta} \cdot \left(g_{\alpha\beta}^{(0)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{g}_{\alpha\beta}^{(\nu)}(\rho_\beta)}{x(x+1) \dots (x+\nu)} \right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_\beta} \cdot z_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta).$$

Considérons la matrice formée de ces solutions; elle peut s'écrire

$$(76) \quad \begin{aligned} (u_{\alpha\beta}(x)) &= (z_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)) \left(\delta_{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_\beta} \right). \\ & \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Nous supposons que α désigne l'index des colonnes et que β désigne l'index des lignes, de sorte que chaque ligne de la matrice (76) sera une solution.

* Voir. L. SCHLESINGER. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. (Leipzig 1908) p. 150

Considérons la matrice $(u_{\alpha\beta}(x))$. Supposons qu'on aurait tiré les plus hautes puissances de $\left(\frac{1}{x}\right)$ communes aux éléments des diverses colonnes de sorte qu'on aurait

$$(77) \quad (u_{\alpha\beta}(x)) = \left(\delta_{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{g_\alpha} \right) (\bar{z}_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)) \left(\delta_{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_\beta} \right).$$

les g_α étant des nombres entiers positifs. Les $\bar{z}_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)$ sont développables en série de facultés.

Si les fonctions $\bar{z}_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)$ sont telles que le déterminant de leurs termes constants soit différent de nul, on peut employer le même procédé, dont nous avons fait usage dans le paragraphe 20, pour démontrer que les fonctions

$$\bar{u}_{\alpha\beta}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_\beta} \cdot \bar{z}_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)$$

satisfont à un système d'équations aux différences canoniques. L'expression (77) nous montre donc que les fonctions (75) satisfont à un système d'équations aux différences qu'on peut ramener à la forme canonique, par une transformation de la forme

$$(78) \quad u_\alpha(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{g_\alpha} \cdot \bar{u}_\alpha(x).$$

C'est le cas le plus simple. Dans le cas général, après avoir tiré les puissances $\left(\frac{1}{x}\right)^{g_\alpha}$ des colonnes, les fonctions $\bar{z}_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)$ sont telles que le déterminant

$$\begin{aligned} & |\bar{z}_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)| \\ & \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

tend vers zéro, quand x tend vers l'infini en restant dans le domaine de convergence des séries de facultés $\bar{z}_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)$.

Considérons la matrice des fonctions $z_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)$

$$(79) \quad (z_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)) = \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{g_\alpha} \cdot \bar{z}_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta) \right).$$

On peut toujours changer la suite des colonnes de manière à avoir

$$g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \dots \leq g_n.$$

On y arrive en multipliant à gauche la matrice (79) par des matrices de la forme

$$N_i = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 1 \end{pmatrix}$$

Par exemple, en multipliant par la matrice N_1 , les colonnes C_1 et C_2 se permutent et ainsi de suite.

Nous écrivons les éléments de la matrice ainsi obtenue

$$(80) \quad z_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta) = \left(\frac{1}{x}\right)^{g_\alpha} \cdot (g_{\alpha\beta}^{(0)} + \dots)$$

en employant toujours la même notation.

Considérons la matrice

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1, & g, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 1 \end{pmatrix}$$

En multipliant à gauche la matrice (80) par N_2 , on voit que, dans la nouvelle matrice, la colonne $C_2 + g C_1$ remplace la colonne C_2 de la matrice (80).

Par suite, en multipliant à gauche la matrice (80) par des matrices de la forme N_2 , on peut soustraire de la colonne C_ν la colonne C_μ ($\nu > \mu$) multipliée par

$$\lambda \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{g_\nu - g_\mu} \quad g_\nu - g_\mu \geq 0,$$

λ désignant un nombre constant.

Par cette opération la colonne C_ν de la matrice $(g_{\alpha\beta}^{(0)})$ est remplacé par la colonne $C_\nu - \lambda \cdot C_\mu$ dans la nouvelle matrice.

De plus, en multipliant à gauche la matrice $(z_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta))$ par des matrices de la forme

$$N_3 = \begin{pmatrix} \lambda, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & 1 \end{pmatrix}$$

on peut obtenir une nouvelle matrice dans laquelle une colonne arbitraire est égale à la colonne correspondante de $(g_{\alpha\beta}^{(0)})$ divisée par un nombre constant quelconque.

Cela posé, nous allons considérer la première colonne de la matrice $(g_{\alpha\beta}^{(0)})$ dont les éléments

$$g_{11}^{(0)}, g_{12}^{(0)}, \dots, g_{1n}^{(0)}$$

ne peuvent pas s'annuler tous.

Supposons que par exemple $g_{11}^{(0)}$ soit nul mais que $g_{12}^{(0)}$ soit le premier élément différent de nul. Après avoir divisé la première colonne par $g_{12}^{(0)}$, on peut écrire la matrice des termes constants comme il suit

$$\begin{pmatrix} 0, & g_{21}^{(0)}, & \dots \\ 1, & g_{22}^{(0)}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

En multipliant la première colonne par des constantes convenables et en la soustrayant aux colonnes suivantes, on obtient une matrice dont tous les éléments de la deuxième ligne, sauf le premier, deviennent nuls.

De la même manière nous traitons l'une après l'autre des colonnes suivantes et nous pouvons continuer le procédé tant que nous ne rencontrons aucune colonne dont tous les éléments sont nuls.

Mais dans ce cas l'exposant g_α en question est augmenté par une unité et nous pouvons encore ranger les colonnes suivant les nouveaux exposants $\bar{g}_\alpha$ et employer de nouveau le même procédé.

Le cas mentionné ne peut arriver qu'un nombre fini de fois, car autrement les solutions n'auraient pas pu former un système fondamental.

Finalement nous arrivons à une matrice dont le procédé s'applique jusqu'à la dernière colonne, et on arrive à une matrice pour les termes constants dont les colonnes peuvent s'arranger de manière à avoir la forme *

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ *, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ *, & *, & 1, & \dots, & 0 \\ \hline *, & *, & \dots, & \dots, & 1 \end{pmatrix}$$

les étoiles désignant des éléments dont nous ne ferons pas usage.

Après ces réductions nous sommes donc arrivés à une matrice dont le déterminant des termes constants est différent de nul.

En combinant toutes les matrices, par lesquelles nous avons multiplié à gauche la matrice

$$(u_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)),$$

on voit qu'on est arrivé à une relation

$$(81) \quad (g_{\alpha\beta})(u_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)) = \left(\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{x}\right)^{\bar{g}_\alpha}\right) (\bar{z}_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)) \left(\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_\beta}\right).$$

Les éléments de la matrice $(g_{\alpha\beta})$ sont des fonctions rationnelles entières de $\frac{1}{x}$, et le déterminant

$$\begin{aligned} & |g_{\alpha\beta}| \\ & \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

est égal à une constante, différente de zéro.

Mais nous savons que des fonctions, telles que les

$$\begin{aligned} \zeta_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta) &= \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_\beta} \cdot \bar{z}_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta), \\ \alpha, \beta &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

satisfont à des systèmes d'équations aux différences de la forme canonique.

Le déterminant $|g_{\alpha\beta}|$ étant égal à une constante, on obtient pour la matrice inverse $(h_{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta})^{-1}$ une matrice dont tous les éléments sont aussi des fonctions

* Voir SCHLESINGER: Lehrbuch etc. pag. 153.

rationnelles entières de $\frac{1}{x}$, et la relation (81) peut s'écrire

$$(82) \quad (u_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)) = (h_{\alpha\beta}) \left(\delta_{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^{\bar{g}_\alpha} \right) (\zeta_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)).$$

Mais cette relation nous montre que les fonctions

$$u_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta) \quad \text{et} \quad \zeta_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta)$$

sont liées aux autres par les relations

$$(83) \quad u_{\alpha\beta}(x, \rho_\beta) = \sum_{\lambda=1}^n h_{\alpha\lambda} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^{\bar{g}_\lambda} \cdot \zeta_{\lambda\beta}(x, \rho_\beta)$$

les $\bar{g}_\lambda$ étant des nombres entiers positifs ou zéro.

Nous pouvons résumer ces résultats en le théorème suivant.

Tous les systèmes d'équations aux différences finies linéaires et homogènes du premier ordre qui admettent un système fondamental de solutions $u_{\alpha\beta}(x)$ de la forme (75) sont de la forme canonique, ou ils peuvent, par une transformation du type

$$(84) \quad u_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^n h_{\alpha\lambda} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^{\bar{g}_\lambda} \cdot \bar{u}_\lambda(x),$$

être ramenés à des systèmes, ayant la forme canonique. Les $h_{\alpha\lambda}$ sont des fonctions rationnelles entières de $\frac{1}{x}$ et les $\bar{g}_\lambda$ sont des nombres entiers positifs ou zéro.

Dans le chapitre suivant nous allons montrer comment on peut obtenir le même résultat pour les solutions régulières générales, contenant des dérivées des fonctions $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_s)}$.

CHAPITRE V.

22. Dans ce chapitre nous allons considérer les systèmes d'équations aux différences admettant comme solutions des solutions régulières les plus générales. Pour faciliter l'exposition, nous allons traiter les mêmes cas dont il a été question dans les paragraphes (9), (12) et (13) du chapitre II.

D'abord nous allons considérer des solutions canoniques. Soit n systèmes de fonctions, linéairement indépendantes, de la forme

$$(51) \quad z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, i)} = z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, i)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}} = \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho_i^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}^{(i-s)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}$$

$$\lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_r^{(i)}.$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

et considérons le système d'équations aux différences admettant comme solutions ce groupe de fonctions.

Considérons la fonction

$$(85) \quad z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, 0)} = z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, 0)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \cdot \zeta_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, 0)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}$$

En formant la différence finie par rapport à x , on trouve

$$(86) \quad -(x-1) \Delta_{-1} z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, 0)} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} v_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, 0)}$$

où l'on a posé

$$(87) \quad v_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, 0)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}} = v_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, 0)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}^{(\nu)}(\rho_i) \cdot (\rho_i + \nu)}{(x + \rho_i)(x + \rho_i + 1) \dots (x + \rho_i + \nu - 1)}.$$

Écrivons l'égalité (85) sous la forme

$$v_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, 0)} = -(x-1) \cdot \frac{\Gamma(x + \rho_i)}{\Gamma(x)} \cdot \Delta_{-1} z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, 0)}$$

et dérivons i fois par rapport à ρ_i , on trouve la relation

$$(88) \quad v_{\alpha}^{(i)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}} = \sum_{\nu=0}^i -\binom{i}{\nu} \cdot (x-1) \cdot \Delta_{-1} z_{\alpha}^{(\lambda^{(i)}, \nu)}(x, \rho_i) \cdot \frac{\partial^{i-\nu}}{\partial \rho_i^{i-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x + \rho_i)}{\Gamma(x)} \right).$$

En faisant usage des relations entre les solutions $z_\alpha^{(\lambda^{(i)}, \nu)}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, i-1$) et les solutions canoniques $z_\alpha^{(\lambda^{(i)}, i)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, i-1$), on voit que la relation (88) peut s'écrire

$$(89) \quad v_\alpha^{(\lambda^{(i)}, i)} = \sum_{\nu=0}^{i-1} -c_\alpha^{(\nu, i)} \cdot (x-1) \cdot \Delta_{-1} z_\alpha^{(\lambda^{(i)}, \nu)} \cdot \frac{\partial^{i-\nu}}{\partial \rho_i^{i-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x + \rho_i)}{\Gamma(x)} \right).$$

De la même manière on trouve la relation

$$(90) \quad \zeta_\alpha^{(i)}(x, \rho_i) \lambda^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{i-1} c_\alpha^{(\nu, i)} \cdot z_\alpha^{(\lambda^{(i)}, \nu)} \cdot \frac{\partial^{i-\nu}}{\partial \rho_i^{i-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x + \rho_i)}{\Gamma(x)} \right).$$

Les nombres $c_\alpha^{(\nu, i)}$ sont des constantes.

En introduisant les expressions de nos solutions dans les déterminants (D) après avoir multiplié la première colonne par $-(x-1)$, on trouve les déterminants suivants

$$(91) \quad \begin{vmatrix} -(x-1) \Delta_{-1} u_\alpha(x), & u_1(x), & u_2(x), & \dots, & u_n(x) \\ \hline -(x-1) \Delta_{-1} z_\alpha^{(\lambda^{(0)})}, & z_1^{(\lambda^{(0)})}, & z_2^{(\lambda^{(0)})}, & \dots, & z_n^{(\lambda^{(0)})} \\ & \lambda^{(0)} = \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{p^{(0)}}^{(0)} \\ \hline -(x-1) \Delta_{-1} z_\alpha^{(\lambda^{(1)})}, & z_1^{(\lambda^{(1)})}, & z_2^{(\lambda^{(1)})}, & \dots, & z_n^{(\lambda^{(1)})} \\ & \lambda^{(1)} = \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{p^{(1)}}^{(1)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline -(x-1) \Delta_{-1} z_\alpha^{(\lambda^{(i)})}, & z_1^{(\lambda^{(i)})}, & z_2^{(\lambda^{(i)})}, & \dots, & z_n^{(\lambda^{(i)})} \\ & \lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{p^{(i)}}^{(i)} \\ \hline \end{vmatrix} = 0.$$

$\alpha = 1, 2, \dots, n.$

Considérons la ligne contenant les solutions $z_\alpha^{(\lambda^{(i)})}$. En tenant compte des relations (88) et (89), on trouve que, en multipliant des lignes précédentes par des facteurs convenables et en les joignant à la ligne où se trouvent les $z_\alpha^{(\lambda^{(i)})}$, on peut ramener les déterminants (91) à la forme

$$(92) \quad \left| \begin{array}{cccc} -(x-1) \Delta_{-1} u_\alpha(x), & u_1(x), & u_2(x), & \dots, & u_n(x). \\ \hline v_\alpha(x, \rho_0)_{\lambda^{(0)}}, & \zeta_1(x, \rho_0)_{\lambda^{(0)}}, & \zeta_2(x, \rho_0)_{\lambda^{(0)}}, & \dots, & \zeta_n(x, \rho_0)_{\lambda^{(0)}}, \\ & \lambda^{(0)} = \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_{p^{(0)}}^{(0)} \\ \hline v_\alpha^{(1)}(x, \rho_1)_{\lambda^{(1)}}, & \zeta_1^{(1)}(x, \rho_1)_{\lambda^{(1)}}, & \zeta_2^{(1)}(x, \rho_1)_{\lambda^{(1)}}, & \dots, & \zeta_n^{(1)}(x, \rho_1)_{\lambda^{(1)}}, \\ & \lambda^{(1)} = \lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{p^{(1)}}^{(1)} \\ \hline v_\alpha^{(i)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}, & \zeta_1^{(i)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}, & \zeta_2^{(i)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}, & \dots, & \zeta_n^{(i)}(x, \rho_i)_{\lambda^{(i)}}, \\ & \lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{p^{(i)}}^{(i)} \\ \hline \end{array} \right| = 0.$$

$\alpha = 1, 2, \dots, n.$

où nous avons supprimé les $\rho^{(0)}$ facteurs $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)}$.

Considérons le mineur correspondant à l'élément $-(x-1) \Delta_{-1} u_\alpha(x)$ du déterminant (92). Tous les éléments de ce déterminant sont des séries de facultés. Par conséquent, le mineur admet aussi un développement en série de facultés, dont nous allons déterminer le terme constant.

Ce terme est donné par un déterminant, dont tous les éléments sont nuls sauf les éléments de l'une des diagonales qui sont égaux aux nombres

$$\varepsilon_{\lambda^{(i)}} \cdot i!$$

En développant les déterminants (92) suivant la première ligne, on arrive au système suivant

$$(x-1) \Delta_{-1} u_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^n a_{\alpha\lambda}(x) \cdot u_\lambda(x).$$

$\alpha = 1, 2, \dots, n.$

Nous allons déterminer les termes constants $a_{\alpha\lambda}^{(0)}$ des séries de facultés représentant les coefficients $a_{\alpha\lambda}(x)$.

En écrivant les termes constants des séries de facultés du déterminant (92), on trouve

$$\begin{array}{cccc} \delta_{\alpha\lambda^{(0)}} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(0)}} \cdot \rho_0, & \delta_{1\lambda^{(0)}} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(0)}}, & \dots, & \delta_{n\lambda^{(0)}} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(0)}}, \\ \hline \delta_{\alpha\lambda^{(1)}} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(1)}} \cdot \rho_1, & \delta_{1\lambda^{(1)}} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(1)}}, & \dots, & \delta_{n\lambda^{(1)}} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(1)}}, \\ \hline \delta_{\alpha\lambda^{(i)}} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(i)}} \cdot \rho_i \cdot i!, & \delta_{1\lambda^{(i)}} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(i)}} \cdot i!, & \dots, & \delta_{n\lambda^{(i)}} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(i)}} \cdot i!, \\ \hline \end{array}$$

En procédant comme nous l'avons fait dans le paragraphe 20, on voit que les nombres $a_{\alpha\lambda}^{(0)}$ deviennent nuls sauf les

$$a_{\lambda(i)\lambda(i)}^{(0)} = -\rho_i.$$

Par suite, le système est de la forme canonique et à la racine multiple $\rho = \rho_i$ de l'équation caractéristique il ne correspond que des diviseurs élémentaires simples du déterminant caractéristique.

23. Supposons qu'il soit donné n systèmes de solutions canoniques linéairement indépendantes, parmi lesquelles il se trouve le groupe suivant

$$(93) \quad z_{\alpha}^{(\lambda, i)} = \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho_0^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)} \right) \cdot \zeta_{\alpha}^{(i-s)}(x, \rho_0)_{\lambda}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, i-1; \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r.$$

C'est le cas que nous avons rencontré dans le paragraphe 12. Nous avons

$$z_{\alpha}^{(\lambda, 0)} = z_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda}.$$

De cette égalité on dérive la suivante

$$(94) \quad \zeta_{\alpha}^{(i)}(x, \rho_0)_{\lambda} = - \sum_{v=0}^i (x-1) \cdot \binom{i}{v} \cdot z_{\alpha}^{(v)}(x, \rho_0)_{\lambda} \cdot \frac{\partial^{i-v}}{\partial \rho_0^{i-v}} \left(\frac{\Gamma(x + \rho_0)}{\Gamma(x)} \right).$$

Posons

$$(95) \quad -(x-1) \Delta_{-1} z_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)} \cdot v_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda}$$

où nous avons

$$v_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}^{(v)}(\rho_0) \cdot (\rho_0 + v)}{(x + \rho_0)(x + \rho_0 + 1) \dots (x + \rho_0 + v - 1)} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\bar{g}_{\alpha}^{(v)}(\rho_0) (\rho_0 + v)}{x(x+1) \dots (x+v-1)}$$

$$g_{\alpha}^{(0)}(\rho_0) = \bar{g}_{\alpha}^{(0)}(\rho_0).$$

A l'aide de l'égalité (95) on obtient la relation

$$(96) \quad v_{\alpha}^{(i)}(x, \rho_0)_{\lambda} = - \sum_{v=0}^i (x-1) \cdot \binom{i}{v} \cdot \Delta_{-1} z_{\alpha}^{(v)}(x, \rho_0)_{\lambda} \cdot \frac{\partial^{i-v}}{\partial \rho_0^{i-v}} \left(\frac{\Gamma(x + \rho_0)}{\Gamma(x)} \right).$$

Pour déterminer le système qui admet comme solutions les expressions (93), nous procédons comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent et nous obtenons les déterminants

$$(97) \quad \begin{vmatrix} -(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha}(x), & \dots, & u_{\alpha'}(x), & u_{\alpha''}(x), & \dots, & u_{\alpha e_{\lambda}}(x), & \dots \\ \hline -(x-1) \Delta_{-1} z_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & z_{\alpha'}(x, \rho_0)_{\lambda}, & z_{\alpha''}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & z_{\alpha e_{\lambda}}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots \\ -(x-1) \Delta_{-1} z_{\alpha}^{(1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & z_{\alpha'}^{(1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & z_{\alpha''}^{(1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & z_{\alpha e_{\lambda}}^{(1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots \\ \hline -(x-1) \Delta_{-1} z_{\alpha}^{(e_{\lambda}-1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & z_{\alpha'}^{(e_{\lambda}-1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & z_{\alpha''}^{(e_{\lambda}-1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & z_{\alpha e_{\lambda}}^{(e_{\lambda}-1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots \\ \hline \end{vmatrix} = 0$$

$\alpha = 1, 2, \dots, n.$

Dans le déterminant (97) nous n'avons écrit que les lignes correspondant au groupe de solutions (93).

En tenant compte des relations (94) et (96), on peut, par des transformations élémentaires, donner au système cherché la forme suivante

$$(98) \quad \begin{vmatrix} -(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha}(x), & \dots, & u_{\alpha'}(x), & u_{\alpha''}(x), & \dots, & u_{\alpha e_{\lambda}}(x), & \dots \\ \hline v_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & \zeta_{\alpha'}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \zeta_{\alpha''}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & \zeta_{\alpha e_{\lambda}}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots \\ v_{\alpha}^{(1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & \zeta_{\alpha'}^{(1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \zeta_{\alpha''}^{(1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & \zeta_{\alpha e_{\lambda}}^{(1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots \\ \hline v_{\alpha}^{(e_{\lambda}-1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & \zeta_{\alpha'}^{(e_{\lambda}-1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \zeta_{\alpha''}^{(e_{\lambda}-1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots, & \zeta_{\alpha e_{\lambda}}^{(e_{\lambda}-1)}(x, \rho_0)_{\lambda}, & \dots \\ \hline \end{vmatrix} = 0$$

$\alpha = 1, 2, \dots, n.$

En développant (98) suivant les éléments de la première ligne, on aura pour le système la forme

$$(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha}(x) = \sum_{\lambda=1}^n a_{\alpha \lambda}(x) \cdot u_{\lambda}(x)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Le mineur relatif à l'élément

$$-(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha}(x)$$

est donné par une série de facultés, dont le terme constant se représente par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dots & 0, & \dots & 0, & \dots & 0, & \varepsilon_\lambda, & \dots \\ \dots & 0, & \dots & 0, & \dots & \varepsilon_\lambda, & 0, & \dots \\ \dots & \varepsilon_\lambda \cdot (e_\lambda - 1)!, & 0, & \dots & 0, & 0, & \dots \end{vmatrix}$$

qui est différent de nul.

Nous allons déterminer les termes constants $a_{\alpha\lambda}^{(0)}$ des séries de facultés qui représentent les fonctions $a_{\alpha\lambda}(x)$.

Les termes constants des séries $v_\alpha^{(s)}(x, \rho_0)$ deviennent

$$\left[\frac{\partial^s}{\partial \rho^s} (\rho \cdot g_\alpha^{(0)}(\rho)) \right]_{\rho=\rho_0}$$

ou encore

$$\left[\rho \cdot \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} (g_\alpha^{(0)}(\rho)) + s \cdot \frac{\partial^{s-1}}{\partial \rho^{s-1}} g_\alpha^{(0)}(\rho) \right]_{\rho=\rho_0}$$

Par suite, le terme constant de la série

$$v_{\alpha e_\lambda}(x, \rho_0)_\lambda$$

est égal à $\rho_0 \cdot \varepsilon_\lambda$.

Pour les séries

$$v_{\alpha e_\lambda - 1}^{(1)}(x, \rho_0)_\lambda \text{ et } v_{\alpha e_\lambda}^{(1)}(x, \rho_0)_\lambda$$

les termes constants deviennent

$$\rho_0 \cdot \varepsilon_\lambda \text{ et } \varepsilon_\lambda,$$

et ainsi de suite.

Pour les séries

$$v_{\alpha e_\lambda - 1}^{(e_\lambda - 1)}(x, \rho_0)_\lambda \text{ et } v_{\alpha e_\lambda}^{(e_\lambda - 1)}(x, \rho_0)_\lambda$$

les termes constants deviennent

$$\rho_0 \cdot (e_\lambda - 1)! \cdot \varepsilon_\lambda \text{ et } (e_\lambda - 1)! \cdot \varepsilon_\lambda.$$

Les termes constants des autres séries

$$v_\alpha^{(s)}(x, \rho_0)_\lambda$$

pour α égal à un des nombres $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha_{e_\lambda}$ et $s = 0, 1, 2, \dots, e_\lambda - 1$ deviennent nuls.

En procédant comme nous l'avons fait précédemment on trouve pour les $a_{\alpha\lambda}^{(0)}$

$$a_{\alpha e_\lambda \alpha e_\lambda}^{(0)} = a_{\alpha e_\lambda - 1 \alpha e_\lambda}^{(0)} = \dots = a_{\alpha' \alpha'}^{(0)} = a_{\alpha' \alpha'}^{(0)} = \dots = \rho_0$$

et

$$a_{\alpha}^{(0)} e_{\lambda} e_{\lambda}-1 = a_{\alpha}^{(0)} e_{\lambda}-1 e_{\lambda}-2 = \dots = a_{\alpha'''}^{(0)} = a_{\alpha'' \alpha'}^{(0)} = 1.$$

Par suite, notre système d'équations aux différences est de la forme canonique, et à la racine multiple ρ_0 de l'équation caractéristique correspond le diviseur élémentaire multiple

$$(\rho - \rho_0)^{e_{\lambda}}.$$

24. Maintenant nous allons considérer les solutions canoniques les plus générales. Supposons qu'il soit donné n systèmes de solutions linéairement indépendantes ayant la même forme que les solutions (62) du paragraphe 13.

Un groupe de ces séries sera donné par le groupe (62), que nous écrirons comme il suit.

$$(99) \quad z_{\alpha}^{\mu_{\lambda}(0)} = \begin{pmatrix} z_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda}^{(0)} \\ z_{\alpha}^{(1)}(x, \rho_0)_{\lambda}^{(0)} \dots z_{\alpha}^{\mu_{\lambda}(1)} \\ \vdots \\ (e_{\lambda}(0)-1) \\ z_{\alpha}(x, \rho_0)_{\lambda}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{\alpha}^{(e^{(0)})}(x, \rho_1)_{\lambda}^{(1)} \\ z_{\alpha}^{(e^{(0)}+1)}(x, \rho_1)_{\lambda}^{(1)} \dots z_{\alpha}^{\mu_{\lambda}(i)} \\ \vdots \\ (e^{(0)}+e_{\lambda}(1)-1) \\ z_{\alpha}(x, \rho_1)_{\lambda}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{\alpha}^{(l^{(i-1)})}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} \\ z_{\alpha}^{(l^{(i-1)}+1)}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} \dots \\ \vdots \\ (l_{\lambda}(i)-1) \\ z_{\alpha}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Posons

$$z_{\alpha}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \cdot \zeta_{\alpha}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)}$$

ou encore

$$\zeta_{\alpha}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} = \frac{\Gamma(x + \rho_i)}{\Gamma(x)} \cdot z_{\alpha}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)}.$$

En dérivant $\mu^{(0)}$ fois par rapport à ρ_i , on trouve

$$(100) \quad \zeta_{\alpha}^{(\mu^{(0)})}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu^{(0)}} \binom{\mu^{(0)}}{\nu} \cdot z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} \cdot \frac{\partial^{\mu^{(0)}-\nu}}{\partial \rho_i^{\mu^{(0)}-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x + \rho_i)}{\Gamma(x)} \right).$$

En tenant compte du fait que les solutions

$$z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, e^{(0)} - 1,$$

sont égales, à un facteur constant près, aux solutions canoniques

$$z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_0)_{\lambda}^{(0)} \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, e_{\lambda}(0) - 1,$$

on voit que l'équation (100) peut être ramenée à la suivante

$$(101) \quad \zeta_{\alpha}^{(\mu^{(0)})}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu^{(0)}} e_{\alpha}^{(\mu^{(0)}, \nu)} \cdot z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_0)_{\lambda}^{(0)} \cdot \frac{\partial^{\mu^{(0)}-\nu}}{\partial \rho_i^{\mu^{(0)}-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x + \rho_i)}{\Gamma(x)} \right).$$

$$\mu^{(0)} = 0, 1, 2, \dots, e^{(0)} - 1.$$

De la même manière on trouve

$$(102) \quad \zeta_{\alpha}^{(\mu^{(i)})}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=e^{(0)}-1} c_{\alpha}^{(\mu^{(i)}, \nu)} \cdot z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_0)_{\lambda}^{(0)} \cdot \frac{\partial^{\mu^{(i)}-\nu}}{\partial \rho_i^{\mu^{(i)}-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x+\rho_i)}{\Gamma(x)} \right) +$$

$$+ \sum_{\nu=e^{(0)}}^{\nu=\mu^{(1)}} c_{\alpha}^{(\mu^{(i)}, \nu)} \cdot z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_1)_{\lambda}^{(1)} \cdot \frac{\partial^{\mu^{(i)}-\nu}}{\partial \rho_i^{\mu^{(i)}-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x+\rho_i)}{\Gamma(x)} \right).$$

$$\mu^{(i)} = e^{(0)}, e^{(0)} + 1, \dots, e^{(0)} + e_{\lambda}^{(0)} - 1.$$

et ainsi de suite:

$$(103) \quad \zeta_{\alpha}^{(\mu_{\lambda}^{(i)})}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu_{\lambda}^{(i)}} \binom{\mu_{\lambda}^{(i)}}{\nu} \cdot z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} \cdot \frac{\partial^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}}{\partial \rho_i^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x+\rho_i)}{\Gamma(x)} \right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=e^{(0)}-1} c_{\alpha}^{(\mu_{\lambda}^{(i)}, \nu)} \cdot z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_0)_{\lambda}^{(0)} \cdot \frac{\partial^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}}{\partial \rho_i^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x+\rho_i)}{\Gamma(x)} \right) +$$

$$+ \sum_{\nu=e^{(0)}}^{\nu=e^{(0)}+e^{(1)}-1} c_{\alpha}^{(\mu_{\lambda}^{(i)}, \nu)} \cdot z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_1)_{\lambda}^{(1)} \cdot \frac{\partial^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}}{\partial \rho_i^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x+\rho_i)}{\Gamma(x)} \right) + \dots +$$

$$+ \sum_{\nu=l^{(i-1)}}^{\nu=\mu_{\lambda}^{(i)}} c_{\alpha}^{(\mu_{\lambda}^{(i)}, \nu)} \cdot z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} \cdot \frac{\partial^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}}{\partial \rho_i^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x+\rho_i)}{\Gamma(x)} \right).$$

En posant

$$-(x-1) \Delta_{-1} z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho_i)} \cdot v_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)},$$

où

$$v_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{g}_{\alpha}^{(\nu)}(\rho_i) (\rho_i + \nu)}{x(x+1) \dots (x+\nu-1)} \quad (\bar{g}_{\alpha}^{(0)}(\rho_i) = (g_{\alpha}^{(0)}(\rho_i))$$

on trouve des relations analogues, parmi lesquelles nous écrivons la dernière:

$$(104) \quad v_{\alpha}^{(\mu_{\lambda}^{(i)})}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=e^{(0)}-1} -(x-1) \cdot c_{\alpha}^{(\mu_{\lambda}^{(i)}, \nu)} \cdot \Delta_{-1} z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_0)_{\lambda}^{(0)} \cdot \frac{\partial^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}}{\partial \rho_i^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x+\rho_i)}{\Gamma(x)} \right) + \dots$$

$$+ \sum_{\nu=l^{(i-1)}}^{\nu=\mu_{\lambda}^{(i)}} -(x-1) \cdot c_{\alpha}^{(\mu_{\lambda}^{(i)}, \nu)} \cdot \Delta_{-1} z_{\alpha}^{(\nu)}(x, \rho_i)_{\lambda}^{(i)} \cdot \frac{\partial^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}}{\partial \rho_i^{\mu_{\lambda}^{(i)}-\nu}} \left(\frac{\Gamma(x+\rho_i)}{\Gamma(x)} \right).$$

$$\mu_{\lambda}^{(i)} = l^{(i-1)}, l^{(i-1)} + 1, \dots, l_{\lambda}^{(i)} - 1.$$

Les nombres

$$c_{\alpha}^{(\mu_{\lambda}(i), \nu)}$$

qui se trouvent dans les formules précédentes sont des constantes.

Cela posé, nous allons considérer les déterminants qu'on obtient, en substituant les solutions données dans les déterminants (D), dont nous avons multiplié la première colonne par le facteur $-(x-1)$.

Ils s'écrivent

$$(105) \quad \begin{vmatrix} -(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha}(x), & \dots, & u_{\alpha_1}(x), & u_{\alpha_2}(x), & \dots, & u_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}(x), & \dots \\ \hline -(x-1) \Delta_{-1} z_{\alpha}^{l^{(i-1)}}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & z_{\alpha_1}^{l^{(i-1)}}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, & z_{\alpha_2}^{l^{(i-1)}}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & z_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}^{l^{(i-1)}}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots \\ \hline -(x-1) \Delta_{-1} z_{\alpha}^{l^{(i-1)}+1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & z_{\alpha_1}^{l^{(i-1)}+1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, & z_{\alpha_2}^{l^{(i-1)}+1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & z_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}^{l^{(i-1)}+1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots \\ \hline -(x-1) \Delta_{-1} z_{\alpha}^{l_{\lambda(i)}-1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & z_{\alpha_1}^{l_{\lambda(i)}-1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, & z_{\alpha_2}^{l_{\lambda(i)}-1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & z_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}^{l_{\lambda(i)}-1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots \\ \hline \end{vmatrix} = 0.$$

$\alpha = 1, 2, \dots, n.$

Nous n'avons écrit que les lignes correspondant à une certaine valeur de i et de $\lambda^{(i)}$.

En se servant des égalités (101)–(104), on peut, par des transformations élémentaires, ramener les déterminants (105) aux suivants

$$(106) \quad \begin{vmatrix} -(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha}(x), \dots, & u_{\alpha_1}(x), & u_{\alpha_2}(x), & \dots, & u_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}(x), & \dots \\ \hline v_{\alpha}^{l^{(i-1)}}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & \zeta_{\alpha_1}^{l^{(i-1)}}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, & \zeta_{\alpha_2}^{l^{(i-1)}}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & \zeta_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}^{l^{(i-1)}}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots \\ \hline v_{\alpha}^{l^{(i-1)}+1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & \zeta_{\alpha_1}^{l^{(i-1)}+1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, & \zeta_{\alpha_2}^{l^{(i-1)}+1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & \zeta_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}^{l^{(i-1)}+1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots \\ \hline v_{\alpha}^{l_{\lambda(i)}-1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & \zeta_{\alpha_1}^{l_{\lambda(i)}-1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, & \zeta_{\alpha_2}^{l_{\lambda(i)}-1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots, & \zeta_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}^{l_{\lambda(i)}-1}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}, \dots \\ \hline \end{vmatrix} = 0.$$

$\alpha = 1, 2, \dots, n.$

Nous avons supprimé les facteurs $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_0)}$.

En développant les déterminants (106) suivant les éléments de la première ligne, on peut mettre le système cherché sous la forme

$$(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha}(x) = \sum_{\lambda=1}^n a_{\alpha\lambda}(x) \cdot u_{\lambda}(x)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Nous allons déterminer les termes constants $a_{\alpha\lambda}^{(0)}$ des séries $a_{\alpha\lambda}(x)$, λ étant un des nombres

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{e_{\lambda}(i)}$$

Considérons les termes constants des séries

$$v_{\alpha}^{\mu_{\lambda}(i)}(x, \rho_i)_{\lambda(i)};$$

on en trouve les expressions

$$\left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda}(i)}}{\partial \rho_i^{\mu_{\lambda}(i)}} (\rho \cdot g_{\alpha}^{(0)}(\rho)) \right]_{\rho=\rho_i}$$

ou encore

$$\rho_i \cdot \frac{\partial^{\mu_{\lambda}(i)}}{\partial \rho_i^{\mu_{\lambda}(i)}} g_{\alpha}^{(0)}(\rho_i) + \mu_{\lambda(i)} \cdot \frac{\partial^{\mu_{\lambda}(i)-1}}{\partial \rho_i^{\mu_{\lambda}(i)-1}}$$

$$\mu_{\lambda(i)} = l^{(i-1)}, l^{(i-1)} + 1, \dots, l_{\lambda(i)} - 1.$$

Par suite, le terme constant de la série

$$v_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}^{l^{(i-1)}}$$

est égal à

$$\rho_i \cdot \varepsilon_{\lambda(i)} \cdot (l^{(i-1)})!,$$

et les termes constants des séries

$$v_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}^{l^{(i-1)}+1} \text{ et } v_{\alpha_{e_{\lambda}(i)}}^{l^{(i-1)}+1}$$

deviennent

$$\rho_i \cdot \varepsilon_{\lambda(i)} \cdot (l^{(i-1)} + 1)! \text{ resp. } \varepsilon_{\lambda(i)} \cdot (l^{(i-1)} + 1)!,$$

et ainsi de suite;

les termes constants des séries

$$v_{\alpha_1}^{l_{\lambda(i)}-1} \text{ et } v_{\alpha_2}^{l_{\lambda(i)}-1}$$

deviennent

$$\rho_i \cdot \varepsilon_{\lambda(i)} \cdot (l_{\lambda(i)} - 1)! \text{ resp. } \varepsilon_{\lambda(i)} \cdot (l_{\lambda(i)} - 1)!.$$

Tous les autres termes constants des séries

$$v_{\alpha}^{\mu_{\lambda}(i)}(x, \rho_i)_{\lambda(i)}.$$

sont nuls.

Les termes constants des séries $\zeta_{\alpha}^{\mu_{\lambda}(i)}$, en question, deviennent

$$\begin{array}{ccccccc} \dots, & 0, & 0, & \dots, & \varepsilon_{\lambda(i)} \cdot (l^{(i-1)})!, & \dots \\ \dots, & 0, & 0, & \varepsilon_{\lambda(i)} \cdot (l^{(i-1)} + 1)!, & 0, & \dots \\ \dots, & \varepsilon_{\lambda(i)} \cdot (l_{\lambda(i)} - 1)!, & 0, & \dots, & 0, & \dots \end{array}$$

Par suite, en procédant de la même manière, que nous l'avons fait précédemment, on obtient pour les $a_{\alpha\lambda}^{(0)}$ en question

$$\begin{aligned} a_{\alpha_1\alpha_1}^{(0)} &= a_{\alpha_2\alpha_2}^{(0)} = \dots = a_{\alpha_{e_{\lambda(i)}}\alpha_{e_{\lambda(i)}}}^{(0)} = -\rho_i. \\ a_{\alpha_2\alpha_1}^{(0)} &= a_{\alpha_3\alpha_2}^{(0)} = \dots = a_{\alpha_{e_{\lambda(i)}}\alpha_{e_{\lambda(i)}-1}}^{(0)} = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, le système obtenu est de la forme canonique. De plus, au groupe considéré de solutions correspond la racine multiple $\rho = \rho_i$ de l'équation caractéristique et à cette racine correspond le diviseur élémentaire multiple

$$(\rho - \rho_i)^{e_{\lambda(i)}}$$

du déterminant caractéristique.

Dans ce chapitre nous avons considéré les solutions canoniques qui correspondent à des systèmes canoniques ayant la forme normale (B). Par des transformations linéaires, dont le déterminant est différent de nul, on peut toujours ramener toutes les solutions canoniques à la forme considérée. Il est donc évident qu'il correspond à ces solutions des systèmes canoniques de la forme (A).

25. Il reste à déterminer la forme d'un système d'équations aux différences qui admet un système fondamental de solutions régulières n'ayant pas la forme canonique.

Considérons des solutions régulières de la forme (99).

En les introduisant dans les déterminants (D), et en faisant les mêmes réductions dont il a été question dans le paragraphe 24, on obtient pour le système cherché des relations telles que les expressions (105) et (106).

Mais dans le cas en question le mineur correspondant à l'élément

$$-(x-1) \Delta_{-1} u_{\alpha}(x)$$

est un déterminant qui s'annule d'un ordre fini, quand x tend vers l'infini en restant dans le domaine de convergence des séries de facultés représentant les éléments du déterminant.

Le système ne peut donc pas avoir la forme canonique.

Considérons la matrice formée des fonctions ζ que nous voulons écrire

$$\begin{aligned} & (\zeta_{\alpha\beta}(x)) \\ & \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Après ce que nous avons démontré dans le paragraphe 21, on peut, en multipliant à gauche cette matrice par une matrice

$$(g_{\alpha\beta}(x)),$$

ayant les mêmes propriétés que dans le paragraphe 21, obtenir une matrice

$$\left(\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{x} \right)^{\bar{g}_{\alpha}} \right) (\bar{\zeta}_{\alpha\beta}(x))$$

dont le déterminant des termes constants des fonctions $\bar{\zeta}_{\alpha\beta}$ ne s'annule pas*.

Mais les fonctions $\bar{\zeta}_{\alpha\beta}$ déterminent un système d'équations aux différences ayant la forme canonique.

L'opération indiquée nous montre donc qu'on peut, par une transformation de la forme (84), ramener le système cherché à un système canonique.

Nous avons donc démontré le Théorème.

Tous les systèmes d'équations aux différences finies linéaires et homogènes du premier ordre qui admettent un système fondamental de solutions régulières, ainsi que nous les avons défini, sont de la forme canonique ou ils peuvent, par des transformations de la forme

$$(84) \quad u_{\alpha}(x) = \sum_{\lambda=1}^n h_{\alpha\lambda} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^{\bar{g}_{\lambda}} \cdot \bar{u}_{\lambda}(x),$$

être ramené à la forme canonique (A).

Les $h_{\alpha\lambda}$ sont des fonctions rationnelles entières de $\frac{1}{x}$ et les $\bar{g}_{\lambda}$ sont des nombres entiers positifs ou zéro. Le déterminant

$$|h_{\alpha\lambda}|$$

est égal à une constante différente de nul.

* On suppose que tous les termes constants des séries $\zeta_{\alpha\beta}$ ne s'annulent pas. Cette condition est remplie si les solutions données appartiennent aux exposants ρ_{β} .

